Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
dla uczniów szkół podstawowych woj. śląskiego
w roku szkolnym 2019/2020

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Stopień wojewódzki

Przy punktowaniu zadań należy stosować następujące ogólne reguły:

- Przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Punkt za wybór metody rozwiązania zadania przyznajemy, gdy uczeń zauważył wszystkie istotne własności i związki oraz zaczął je poprawnie stosować, np.: wybrał właściwy algorytm, wzór (i podstawił do niego dane liczby), w inny sposób pokazał plan rozwiązania zadania.
- Punkt za wykonanie zadania (np. obliczenie szukanej wielkości) przyznajemy tylko wtedy, gdy uczeń konsekwentnie stosuje przyjętą metodę rozwiązania (a nie zapisuje, np. ciągu przypadkowych obliczeń) i doprowadza do otrzymania ostatecznego, prawidłowego wyniku.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać proporcjonalnie mniej punktów niż wynosi ich maksymalna liczba dla tego zadania.
- Tytuł laureata uzyskają uczniowie, którzy uzyskali 54 punkty lub więcej.

Zad. 1. *Za każde poprawnie uzupełnione pole przyznajemy 1 punkt, w sumie* ***19 punktów****.*

			5,		
a)			**1**	9	9
b)			**9**		
c)			**6**	0	
d)			**1**	1	
e)		1	**5**		
f)		2	**2**		
g)			**4**	8	
h)	1	0	**2**		
i)			**2**		
j)			**7**	2	
k)			**0**		
l)			**6**		
m)		9	**6**		
n)		7	**3**		
o)			**2**	0	0
p)	1	6	**0**		
q)		4	**2**		
r)			**3**		
s)			**6**		

Za każdą poprawną odpowiedź przyznajemy 1 punkt, czyli w sumie ***6 punktów****.*

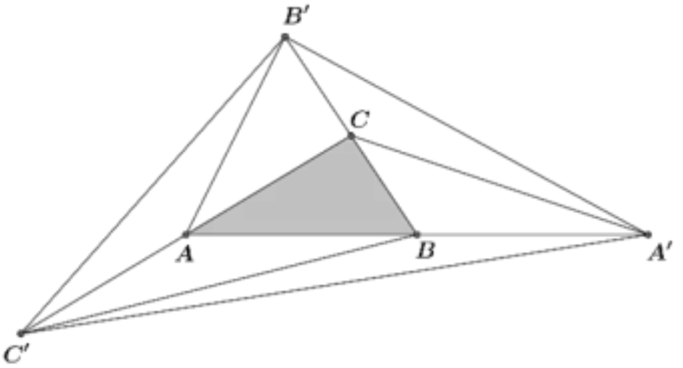
Zad. 2.	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	Zad. 6	Zad. 7
C	B	A	C	B	A

Za każdą poprawną odpowiedź przyznajemy 1 punkt, czyli w sumie ***20 punktów.***

	Zad. 8	Zad. 9	Zad. 10	Zad. 11	Zad. 12
I	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ
II	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA
III	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ
IV	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ

Zad. 13. (0-3)

Dany jest trójkąt *ABC*. Tworzymy trójkąt $A'B'C'$ tak, że C' jest punktem symetrycznym do *C* względem punktu *A*, B' punktem symetrycznym do *B* względem punktu *C*, a A' punktem symetrycznym do *A* względem punktu *B*. Oblicz, ile razy pole trójkąta $A'B'C'$ jest większe od pola trójkąta *ABC*.

Szkice rozwiązań	Schemat punktowania
 **(1)** Pary trójkątów *ABC* i *A'BC, ABC* i *ABC', ABC* i *AB'C* mają równe podstawy i wysokości, zatem mają też równe pola oraz podobnie: **(2)** pary trójkątów *ABC'* i *A'BC', A'BC* i *A'BC', ABC'* i *AB'C'* mają równe podstawy i wysokości, zatem mają też równe pola. Zatem wszystkie wymienione trójkąty mają pola równe polu trójkąta *ABC*. Odp. Pole trójkąta *A'B'C'* jest siedem razy większe od pola trójkąta *ABC*.	***1 p.** – za zauważenie par trójkątów o polach równych trójkątowi ABC **(1).*** ***1 p.** – za zauważenie pozostałych 3 par trójkątów o równych polach **(2)**.* ***1 p.** – za zauważenie zależności pomiędzy polem trójkąta A'B'C' a polem trójkąta ABC (7 razy większe).*

Zad. 14. (0-3)

Świeże jabłka zawierają 90% wody, a suszone – 15% wody. Oblicz, ile kilogramów suszonych jabłek otrzymamy z 34 kg świeżych jabłek?

Szkice rozwiązań	Schemat punktowania
x – masa suszonych jabłek (z 15% wody) w kg 10% z 34 – masa jabłek bez wody w kg (1) 85% z x - masa jabłek bez wody w kg (2) $0{,}85x = 0{,}1 \cdot 34$ $x = 4$ [kg] Odp. Z 34 kg jabłek otrzymamy 4 kg suszonych jabłek.	***1 p.** – za poprawną metodę wyznaczenia masy jabłek bez wody (1) lub (2).* ***1 p.** – za poprawną metodę obliczania masy suszonych jabłek.* ***1 p.** – za poprawne obliczenie masy suszonych jabłek (4 kg)*

Zad. 15. (0-3)

Trzy lata temu Paweł był 3 razy starszy Piotra, a za dwa lata będzie już tylko 2 razy starszy od niego. Oblicz, ile lat ma obecnie Piotr, a ile Paweł.

<table>
<tr><th>Szkice rozwiązań</th><th>Schemat punktowania</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th></th><th>3 lata temu</th><th>obecnie</th><th>za 2 lata</th></tr>
<tr><td>Wiek Piotra</td><td>x – 3</td><td>x</td><td>$x + 2$</td></tr>
<tr><td>Wiek Pawła</td><td>$3(x - 3)$</td><td>$3(x - 3)+3$
$2(x + 2) - 2$</td><td>$2(x + 2)$</td></tr>
</table>
$$3(x-3)+3=2(x+2)-2$$
$$x=8$$
$$2\cdot(8+2)-2=18$$
Odp. Wiek Piotra wynosi obecnie 8 lat, a wiek Pawła 18 lat.
</td><td>
1 p. – za poprawne zapisanie wyrażeń algebraicznych określających warunki zadania.

1 p. – za poprawną metodę obliczenia wieku Piotra lub Pawła.

1 p. – za poprawne obliczenie wieku Piotra i Pawła (8 i 18).
</td></tr>
</table>

Zad. 16. (0-3)

Jeden z boków trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ cm. Czy ten trójkąt może być przystający do trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego jeden bok ma długość $\left(2+\sqrt{6}\right)$ cm? Odpowiedź uzasadnij.

<table>
<tr><th>Szkice rozwiązań</th><th>Schemat punktowania</th></tr>
<tr><td>
Załóżmy, że bok trójkąta o długości $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ cm jest jego ramieniem, a zatem musi być przyprostokątną.
Z tw. Pitagorasa wynika, że kwadrat długości przeciwprostokątnej wynosi: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=10+4\sqrt{6}$.
Jednocześnie $\left(2+\sqrt{6}\right)^2=10+4\sqrt{6}$, zatem przeciwprostokątna drugiego trójkąta jest równa przeciwprostokątnej pierwszego trójkąta.
Przyprostokątne drugiego trójkąta mają więc długość $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$cm.
Oba trójkąty mają boki tej samej długości, więc trójkąty te są przystające.
</td><td>
1 p. – za ustalenie, który bok musi być przyprostokątną, a który przeciwprostokątną.

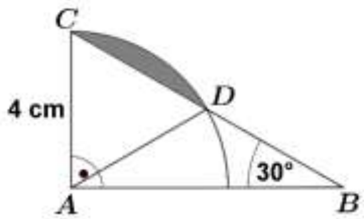
1 p. – za poprawną metodę obliczenia długości przeciwprostokątnej pierwszego trójkąta (tw. Pitagorasa).

1 p. – za udzielenie poprawnej odpowiedzi wynikającej z poprawnych obliczeń.

Uwaga! Za udzielenie poprawnej odpowiedzi wynikającej z błędnych obliczeń – łącznie 2 p.
</td></tr>
</table>

Zad. 17. (0-3)

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 4 cm i kącie ostrym, leżącym naprzeciw tej przyprostokątnej, o mierze 30°. Z wierzchołka kąta prostego poprowadzono łuk o promieniu 4 cm (jak na rysunku). Oblicz pole zacieniowanej figury.

<table>
<tr><th>Szkice rozwiązań</th><th>Schemat punktowania</th></tr>
<tr><td>


Trójką *ADC* jest trójkątem równobocznym, zatem wycinek koła zawierający zacieniowaną figurę stanowi 1/6 koła.

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{6}\pi \cdot 4^2 - \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$

$\boldsymbol{P} = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

Odp. Pole zacieniowanej figury wynosi $\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$ [cm²].
</td><td>
1 p. *– za zauważenie, że trójkąt ADC jest równoboczny.*

1 p. *– za poprawną metodę obliczenia pola zacieniowanej figury.*

1 p. *– za poprawne obliczenie pola zacieniowanej figury.*
</td></tr>
</table>