



## Zadania zamknięte – klucz punktowania

Za każde poprawnie zaznaczone wskazanie 1 punkt, czyli w sumie 27 punktów.

| Zadanie       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Odpowiedź I   | P | P | F | P | P | F | P | P | F  |
| Odpowiedź II  | F | F | F | F | P | F | F | F | P  |
| Odpowiedź III | P | P | P | P | P | F | F | F | F  |

## Zadania otwarte - przykładowe rozwiązania

### Zadanie 11.

$V$  - objętość stożka,  $r$  – promień podstawy stożka,

$l$  – tworząca stożka,  $h$  – wysokość stożka

$$l = 2r$$

$$\pi r l = 8\pi$$

$$\pi r \cdot 2r = 8\pi$$

$$r = 2$$

$$h = \frac{2r\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

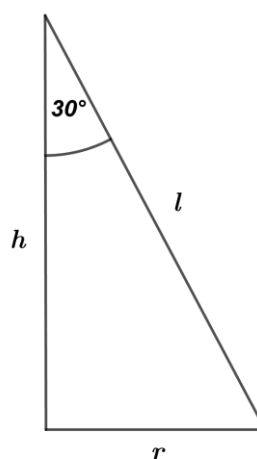
$$h = 2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \pi$$

Odp. Objętość stożka wynosi  $V = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \pi$ .



**Zadanie 12.*****I sposób***

|                        | <b>Cena</b>    | <b>Liczba</b>  | <b>Koszt zakupu</b>                               |
|------------------------|----------------|----------------|---|
| <b>Bilety normalne</b> | $x$            | $y$            | $xy$  |
| <b>Bilety ulgowe</b>   | $\frac{3}{4}x$ | $\frac{1}{3}y$ | $\frac{3}{4}x \cdot \frac{1}{3}y = \frac{1}{4}xy$ |

$$xy + \frac{1}{4}xy = 640$$

$$\frac{5}{4}xy = 640$$

$$xy = 512$$

$$\frac{1}{4}xy = \frac{1}{4} \cdot 512 = 128$$

Odp.: Za bilety normalne zapłacono 512 zł, a za bilety ulgowe zapłacono 128 zł.

***II sposób***

|                        | <b>Liczba</b> | <b>Cena</b>    | <b>Koszt zakupu</b>    |
|------------------------|---------------|----------------|------------------------|
| <b>Bilety ulgowe</b>   | $x$           | $\frac{3}{4}c$ | $x \cdot \frac{3}{4}c$ |
| <b>Bilety normalne</b> | $3x$          | $c$            | $3x \cdot c$           |

$$3x \cdot c + x \cdot \frac{3}{4}c = 640$$

$$3xc \cdot \frac{5}{4} = 640$$

$3xc = 512$  zł – koszt zakupu biletów normalnych

$640 - 512 = 128$  zł – koszt zakupu biletów ulgowych

Odp.: Za bilety normalne zapłacono 512 zł, a za bilety ulgowe zapłacono 128 zł.

**Zadanie 13.**

$$|\angle DAB| = 2\alpha$$

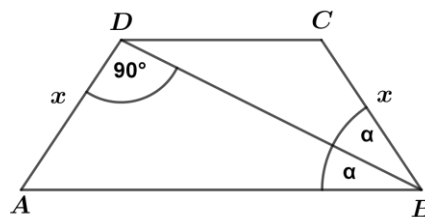
$\alpha = 30^\circ$  ( $ADB$  – trójkąt ekierkowy)

$$|AB| = 2x$$

$$|\angle BDC| = \alpha \text{ (kąty } \angle ABD \text{ i } \angle BDC \text{ są naprzemianległe)}$$

Trójkąt  $BDC$  jest równoramienny, bok  $BD$  jest podstawą.

$$|DC| = |CB| = x = \frac{1}{2}|AB|$$

**Zadanie 14.**

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$2520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Z warunku NWD ( $15, 24, n$ ) = 3 wynika, że w rozkładzie liczby  $n$  na czynniki pierwsze musi wystąpić liczba 3.

Z warunku NWW ( $15, 24, n$ ) = 2520 wynika, że w rozkładzie liczby  $n$  na czynniki pierwsze muszą wystąpić ponadto druga liczba 3 i liczba 7, czyli:  $n = k \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7)$ .

Zatem  $n$  może przyjąć wartości:

$$(3 \cdot 3 \cdot 7) = 63$$

$$2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = 126$$

$$2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = 252$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = 504$$

$$5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = 315$$

$$2 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = 630$$

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = 1260$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = 2520$$

## Schemat punktowania

| Zad.      | Poziom wykonania   | Schemat punktowania  | Liczba punktów |
|-----------|--|--|----------------|
| <b>11</b> | <b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.  | Poprawne obliczenie objętości stożka<br>$\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi\right)$ .                                    | 4 p.           |
|           | <b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Poprawna metoda obliczenia wysokości stożka.   | 3 p.           |
|           | <b>Poziom 3:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.  | Poprawna metoda obliczenia tworzącej stożka.   | 2 p.           |
|           | <b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.  | Ustalenie zależności pomiędzy promieniem podstawy i tworzącą stożka.   | 1 p.           |
|           | <b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.  |  | 0 p.           |
| <b>12</b> | <b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.  | Obliczenie kosztu biletów normalnych (512 zł) i ulgowych (128 zł).   | 4 p.           |
|           | <b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Zapisanie kosztu zakupionych biletów z wykorzystaniem zależności pomiędzy cenami i liczbami zakupionych biletów.   | 3 p.           |
|           | <b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.  | Ustalenie zależności pomiędzy: ceną biletów normalnych i ulgowych<br>ORAZ<br>liczbą biletów normalnych i ulgowych. | 2 p.           |
|           | <b>Poziom 1:</b> dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.  | Ustalenie zależności pomiędzy: ceną biletów normalnych i ulgowych<br>ALBO<br>liczbą biletów normalnych i ulgowych. | 1 p.           |
|           | <b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.  |  | 0 p.           |

| Zad. | Poziom wykonania   | Schemat punktowania  | Liczba punktów |
|------|--|--|----------------|
| 13   | <b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.  | Ustalenie zależności między długością krótszej a długością dłuższej podstawy (pełne uzasadnienie).   | 4 p.           |
|      | <b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.         | Ustalenie wartości miar kątów pomiędzy przekątną $a$ : krótszą podstawą ( $30^\circ$ ) oraz ramieniem ( $30^\circ$ ).                            | 3 p.           |
|      | <b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.  | Ustalenie zależności między długością ramienia a długością dłuższej podstawy.  | 2 p.           |
|      | <b>Poziom 1:</b> dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.  | Ustalenie wartości miar kątów pomiędzy dłuższą podstawą $a$ : ramieniem ( $60^\circ$ ) oraz przekątną ( $30^\circ$ )                             | 1 p.           |
|      | <b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.  |  | 0 p.           |
| 14   | <b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.  | Podanie wszystkich ośmiu możliwych wartości $n$ .  | 4 p.           |
|      | <b>Poziom 5:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.). | Podanie wyłącznie poprawnych, co najmniej czterech możliwych wartości $n$ .  | 3 p.           |
|      | <b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.         | Podanie koniecznych czynników rozkładu liczby $n$ ( $3 \cdot 3 \cdot 7$ ).   | 2 p.           |
|      | <b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.  | Zapisanie rozkładu na czynniki pierwsze liczb: 15, 24, 2520<br>LUB<br>podanie, wśród innych błędnych odpowiedzi, ośmiu poprawnych wartości $n$ . | 1 p.           |
|      | <b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.  |  | 0 p.           |