

**Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki  
dla uczniów dotychczasowych gimnazjów woj. śląskiego  
w roku szkolnym 2018/2019**

**Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania**

**Stopień rejonowy**

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań, przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy, inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać punkty w zależności od poziomu wykonania zadania.
- Liczba punktów umożliwiająca kwalifikację do kolejnego stopnia wynosi co najmniej 51.

**Zadanie 1.**

Za każde poprawnie zapisane hasło w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 20 punktów.

a)	9	4	0	9	
b)	2	4	0	0	
		,			
c)	1	9	1	8	
d)	1	2			
e)	5	2			
		f)	1	5	
g)	2	5			
h)	1	2	4		
		i)	8		
j)	9	9	9	6	
k)	2	0	0	0	
l)	7	4	9	0	0
		m)	3		
n)	1	2			
		o)	4		
p)	9	0	0		
		q)	4	8	
r)	5	5	5		
s)	2	3	4	0	
		t)	5		

**Zadania zamknięte – klucz punktowania**

Za każde poprawnie zaznaczone wskazanie 1 punkt, czyli w sumie 24 punkty.

Zadanie	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Odpowiedź I</b>	P	P	F	P	F	P	P	F
<b>Odpowiedź II</b>	F	F	F	F	F	F	F	F
<b>Odpowiedź III</b>	F	P	P	F	P	F	P	F

## Zadania otwarte - przykładowe rozwiązania

### Zadanie 10.

W szkole jest  $1200 : 30 = 40$  klas.

Jeżeli każda klasa ma ciągu dnia 5 lekcji, to w całej szkole odbywa się  $5 \cdot 40 = 200$  lekcji.

Jeżeli każdą lekcję prowadzi inny nauczyciel, a każdy z nich ma 4 lekcje w ciągu dnia, to w tej szkole uczy  $200 : 4 = 50$  nauczycieli.

### Zadanie 11.

#### *I sposób*

$R$  – promień wewnętrznego toru

$R + 4$  – promień zewnętrznego toru

$d$  – średnica koła pociągu

$\frac{2\pi R}{\pi d}$  – liczba obrotów wykonanych przez koło pociągu po wewnętrznym torze

$\frac{2\pi(R+4)}{\pi d}$  – liczba obrotów wykonanych przez koło pociągu po zewnętrznym torze

$$\frac{2\pi R}{\pi d} = \frac{2\pi(R+4)}{\pi d} - 1$$

$$d = 8$$

Odp. Średnica kół wagoników wynosi 8 cm.

#### *II sposób*

$R$  – promień wewnętrznego toru

$R + 4$  – promień zewnętrznego toru

$d$  – średnica koła pociągu

$s_w$  – droga po wewnętrznym torze,  $s_z$  – droga po zewnętrznym torze

$$s_z - s_w = 2\pi(R+4) - 2\pi R = 8\pi$$

$$8\pi = \pi d$$

$$d = 8 \text{ cm}$$

Odp. Średnica kół wagoników wynosi 8 cm.

**Zadanie 12.****I sposób**

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| - |2+\sqrt{5}| =$$

$$= -2 + \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -4$$

**II sposób**

$$a = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

$$a^2 = 9 - 4\sqrt{5} - 2\sqrt{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{9+4\sqrt{5}} + 9 + 4\sqrt{5} = 18 - 2\sqrt{81-16 \cdot 5} = 16$$

$$|a| = 4 \text{ i } a < 0 \text{ zatem } a = -4$$

**Zadanie 13.****I sposób**

Trójkąty, na które wysokość podzieliła duży trójkąt są podobne do tego trójkąta, zatem

$$\frac{a}{4x} = \frac{h}{3x}$$

$$a = \frac{4}{3}h$$

$$\frac{b}{3x} = \frac{h}{4x}$$

$$b = \frac{3}{4}h$$

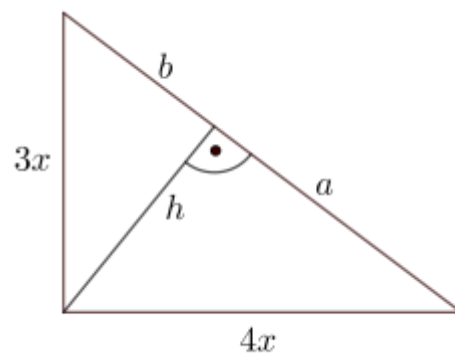
$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{4}{3}h}{\frac{3}{4}h} = \frac{16}{9}$$

**II sposób**

$$(3x)^2 + (4x)^2 = (a+b)^2$$

$$25x^2 = (a+b)^2$$

$$5x = a+b$$



$$\begin{cases} h^2 + a^2 = (4x)^2 \\ h^2 + b^2 = (3x)^2 \end{cases} \quad | -$$

$$a^2 - b^2 = 7x^2$$

$$(a+b)(a-b) = 7x^2$$

$$5x(a-b) = 7x^2$$

$$(a-b) = \frac{7}{5}x$$

$$\begin{cases} a-b = \frac{7}{5}x \\ a+b = 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{16}{5}x \\ b = \frac{9}{5}x \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{16}{9}$$

#### Zadanie 14.

$$h^2 = 10^2 - (10-x)^2 \text{ i } h^2 = (2\sqrt{10})^2 - x^2$$

$$10^2 - (10-x)^2 = (2\sqrt{10})^2 - x^2$$

$$100 - 100 + 20x - x^2 = 40 - x^2$$

$$x = 2$$

$$h = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - x^2}$$

$$h = 6$$

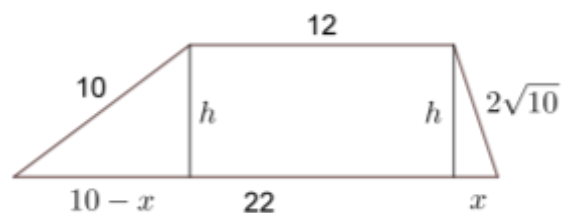
$$P_T = \frac{12+22}{2} \cdot 6 = 102$$

$$V_o = \frac{1}{3} P_T \cdot 20$$

$$V_o = \frac{1}{3} \cdot 102 \cdot 20$$

$$V_o = 680$$

Odp. Objętość ostrosłupa wynosi  $680 \text{ cm}^3$ .



## Schemat punktowania

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.	Obliczenie (podanie z uzasadnieniem) liczby nauczycieli (50).	2 p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Obliczenie (podanie z uzasadnieniem) liczby lekcji jednego dnia (200).	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Obliczenie liczby klas (40).	0 p.
11	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.	Obliczenie średnicy kół wagoników (8 cm).	3 p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie równania wykorzystującego zależność pomiędzy liczbą obrotów kół wagonika jadących po wewnętrznym i zewnętrznym torze. LUB (II sposób) zapisanie równania: różnica długości toru zewnętrznego i toru wewnętrznego jest równa obwodowi koła wagonika.	2 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zapisanie wyrażenia przedstawiającego liczbę obrotów jednego z kół wagonika: jadącego po wewnętrznym lub zewnętrznym torze LUB (II sposób) zapisanie wyrażenia przedstawiającego długość toru zewnętrznego lub toru wewnętrznego.	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
12	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.	Obliczenie wartości wyrażenia $(-4)$ ALBO wartości jego kwadratu (16).	3 p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie wyrażenia jako sumy wartości bezwzględnych ALBO podniesienie danej liczby $a$ do kwadratu.	2 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zapisanie JEDNEGO z wyrażeń pod pierwiastkiem w postaci kwadratu różnicy/sumy.	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
13	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.	Obliczenie stosunku długości odcinków, wyznaczonych na przeciwprostokątnej (16/9).	4 p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Wykorzystanie podobieństwa trójkątów do zapisania zależności pomiędzy długością OBYDWU odcinków wyznaczonych na przeciwprostokątnej i wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną LUB (II sposób) poprawny sposób obliczenia różnicy ( $a - b$ ).	3 p.
	<b>Poziom 3:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Wykorzystanie podobieństwa trójkątów do zapisania zależności pomiędzy długością JEDNEGO z odcinków wyznaczonych na przeciwprostokątnej i wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną LUB (II sposób) zapisanie zależności między długością co najmniej jednego z odcinków wyznaczonych na przeciwprostokątnej i $x$ .	2 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wykazanie podobieństwa „małych” trójkątów i „dużego” trójkąta LUB (II sposób) poprawny sposób obliczenia sumy $a + b$ .	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Obliczenia przy założeniu, że przyprostokątne mają długości 4 cm i 3 cm.	0 p.
14	<b>Poziom 6:</b> pełne rozwiązanie.	Obliczenie objętości ostrosłupa ( $680 \text{ cm}^3$ ).	4 p.
	<b>Poziom 5:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Obliczenie pola trapezu (102 cm).	3 p.
	<b>Poziom 4:</b> zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Poprawna metoda obliczenia wysokości trapezu	2 p.
	<b>Poziom 2:</b> dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wykorzystanie tw. Pitagorasa do zapisania zależności pomiędzy bokami OBYDWU trójkątów prostokątnych.	1 p.
	<b>Poziom 0:</b> rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.

