Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki dla uczniów dotychczasowych gimnazjów woj. śląskiego w roku szkolnym 2017/2018

Etap wojewódzki

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań, przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy, inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać punkty w zależności od poziomu wykonania zadania.
- Liczba punktów umożliwiająca uzyskanie tytułu laureata wynosi co najmniej 54.

Krzyżówka

Zadanie 1.
Za każde poprawnie zapisane hasło w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 18 punktów.

1)									**S**	T	O	Ż	E	K						
2)						A	R	G	**U**	M	E	N	T							
3)								T	**W**	O	R	Z	Ą	C	A					
4)	Ś	R	E	D	N	I	A		**A**	R	Y	T	M	E	T	Y	C	Z	N	A
5)				U	Ł	A	M	E	**K**		W	Ł	A	Ś	C	I	W	Y		
6)				P	R	O	M	I	**L**											
7)					P	R	O	P	**O**	R	C	J	A							
8)					P	O	T	Ę	**G**	A										
9)				L	I	C	Z	B	**A**		W	Y	M	I	E	R	N	A		
10)	K	Ą	T	Y		N	A	P	**R**	Z	E	M	I	A	N	L	E	G	Ł	E
11)							C	**Z**	**Y**	N	N	I	K							
12)		G	R	A	N	I	A	S	**T**	O	S	Ł	U	P						
13)					M	I	L	I	**M**	E	T	R								
14)				P	R	Z	E	M	**I**	E	N	N	O	Ś	Ć					
15)							W	Y	**C**	I	N	E	K		K	O	Ł	A		
16)									**Z**	E	R	O								
17)				S	T	Y	C	Z	**N**	A										
18)						K	Ą	T	**Y**		P	R	Z	Y	L	E	G	Ł	E	

Zadania zamknięte

Za każde poprawnie zaznaczone wskazanie 1 punkt, czyli w sumie 24 punkty.

Zadanie	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź I	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA
Odpowiedź II	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź III	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA

Zadania otwarte

Przykładowe rozwiązania

Zadanie 10. (4 p.)

$$\frac{10^{2n}+4\cdot 10^{n}+4}{9}=\frac{\left(10^{n}+2\right)^{2}}{3^{2}}=\left(\frac{10^{n}+2}{3}\right)^{2}$$

Suma cyfr liczby $10^{n}+2$ wynosi 3, zatem jest ona podzielna przez 3 i wartość ułamka jest liczbą naturalną.

Kwadrat liczby naturalnej też jest liczbą naturalną.

Zadanie 11. (3 p.)

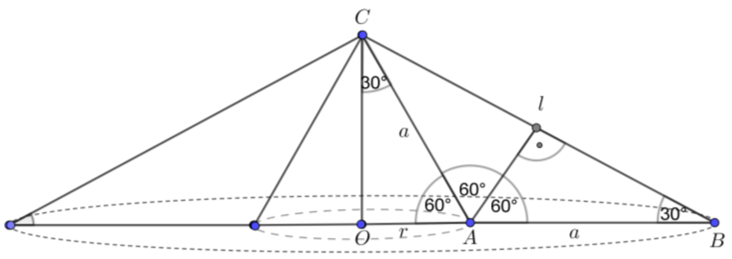
Potęgi parzyste są liczbami nieujemnymi.

Suma liczb nieujemnych wynosi 0, gdy każdy składnik jest równy 0. Zatem:

$$\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=1\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Zadanie 12. (4 p.)



Wysokość opadająca na podstawę BC trójkąta równoramiennego dzieli go na dwa trójkąty prostokątne o kątach ostrych, których miary wynoszą 30° i 60°.

Zatem podstawa ta ma długość $l = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$, czyli $l = 3\sqrt{3}$.

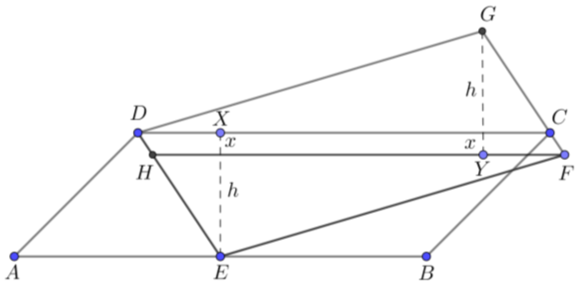
Trójkąt OAC jest trójkątem prostokątnym o kątach ostrych, których miary wynoszą 30° i 60°.

Zatem $r = \frac{1}{2}a$, czyli $r = 1\frac{1}{2}$.

Pole boczne otrzymanej figury jest sumą pól bocznych dwóch stożków i wynosi:

$P_b = \pi ra + \pi(r+a)l$, czyli $P_b = 9\pi\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 13. (3 p.)



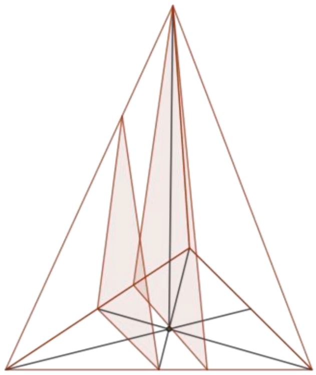
$HF \parallel DC$, $|AB| = |DC| = |HF| = a$

$P_{ABCD} = a(h+x)$

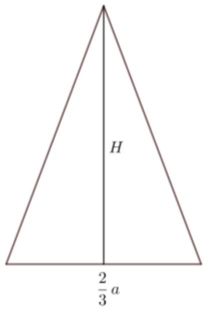
$P_{DEFG} = P_{HEF} + P_{HFCD} + P_{DCG} = \frac{1}{2}ah + ax + \frac{1}{2}ah = ah + ax = a(h+x)$

$P_{ABCD} = P_{DEFG}$

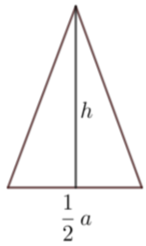
Zadanie 14. (4 p.)



Przekrój P_1 zawierający wysokość ostrosłupa:



Przekrój P_2 przechodzący przez środki dwóch boków podstawy:



Trójkąty będące przekrojami P_1 i P_2 są podobne, zatem:

$$\frac{H}{h}=\frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{2}a}$$

$h=\frac{3}{4}H$, czyli $h = 9$

$$P_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ah$$

$$P_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}\ [\text{cm}^2]$$

Odp. Pole przekroju P_2 wynosi $22\frac{1}{2}$ [cm^2].

Schemat punktowania

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Uzasadnienie, że liczba podana w zadaniu jest naturalna (licznik i mianownik są podzielne przez 3 albo 9).	4 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Zamiana ilorazu kwadratów na kwadrat ilorazu ALBO Uzasadnienie, że kwadrat liczby $10^n + 2$ jest podzielny przez 9.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Uzasadnienie, że liczba $10^n + 2$ jest podzielna przez 3 ALBO uzasadnienie, że suma cyfr licznika wynosi 9.	2 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Zapisanie licznika ułamka w postaci potęgi ALBO innej postaci, z której można wyprowadzić podzielność przez 9.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Zapisanie liczby 9 jako potęgi 3.	0 p.
11	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Poprawne obliczenie wartości x, y.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie układu równań, wykorzystujący fakt, że każda z potęg po lewej stronie równania musi mieć podstawę równą 0.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zauważenie, że każdy składnik po lewej stronie równania musi być równy 0.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
12	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Poprawne obliczenie pola powierzchni bocznej bryły.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Prawidłowy sposób obliczenia szukanego pola powierzchni bocznej ALBO poprawne obliczenie powierzchni bocznej, której tworząca $l = 3\sqrt{3}$.	3 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Podanie długości promienia *r* LUB długości tworzącej *l*.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Wskazanie kątów ostrych w trójkącie *ABC* LUB w trójkącie *OAC*.	1 p,
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
13	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Poprawne porównanie pól równoległoboków.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Wykorzystanie wysokości równoległoboku *ABCD* jako sumy wysokości równoległoboku *HFCD* i trójkąta *HEF*.	2 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Wykonanie poprawnego rysunku obu równoległoboków.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
14	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Prawidłowe obliczenie szukanego pola przekroju.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Poprawna metoda wyliczenia długości wysokości szukanego przekroju.	3 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Wykonanie poprawnego rysunku bryły z zaznaczonym <u>szukanym</u> przekrojem ORAZ podanie prawidłowej długości podstawy szukanego przekroju.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wykonanie poprawnego rysunku bryły z zaznaczonym <u>szukanym</u> przekrojem ALBO podanie prawidłowej długości podstawy szukanego przekroju.	1 p.

	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.