**Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki**
**dla uczniów gimnazjów woj. śląskiego**
**w roku szkolnym 2016/2017**

## Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

## Etap rejonowy

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań, przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy, inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać punkty w zależności od poziomu wykonania zadania.
- Liczba punktów umożliwiająca kwalifikację do kolejnego etapu wynosi co najmniej 51.

**Zadanie 1.**
Za każde poprawnie zapisane hasło w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 21 punktów.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **0,** | | | | |
| a) | 9 | 9 | 9 | **9** | 9 | | | |
| b) | | | | **9** | 6 | 1 | | |
| c) | | | 7 | **9** | 5 | | | |
| d) | | | 1 | **5** | 0 | | | |
| e) | | | 1 | **0** | 9 | | | |
| f) | | | 1 | **4** | | | | |
| g) | | | 1 | **2** | 0 | 0 | | |
| h) | | | 8 | **1** | | | | |
| i) | | | | **4** | | | | |
| j) | | | | **1** | | | | |
| k) | | | 7 | **7** | 7 | | | |
| l) | | | 1 | **9** | | | | |
| m) | | | | **4** | | | | |
| n) | | | 9 | **7** | | | | |
| o) | | | | **4** | 0 | 0 | | |
| p) | | | | **4** | 0 | | | |
| q) | | 2 | 5 | **6** | | | | |
| r) | | 1 | 1 | **7** | 1 | 0 | 0 | 0 |
| s) | | | | **0** | | | | |
| t) | | | | **3** | 0 | 0 | 0 | |
| u) | | | 6 | **0** | | | | |

## Zadania zamknięte

Za każde poprawnie zaznaczone wskazanie 1 punkt, czyli w sumie 24 punkty.

| Zadanie | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Odpowiedź I** | PRAWDA | PRAWDA | FAŁSZ | FAŁSZ | FAŁSZ | PRAWDA | FAŁSZ | FAŁSZ |
| **Odpowiedź II** | FAŁSZ | PRAWDA | PRAWDA | PRAWDA | FAŁSZ | PRAWDA | PRAWDA | FAŁSZ |
| **Odpowiedź III** | FAŁSZ | FAŁSZ | FAŁSZ | PRAWDA | FAŁSZ | FAŁSZ | PRAWDA | PRAWDA |

## Zadania otwarte

**Przykładowe rozwiązania:**

**Zadanie 10.**

| x | 10(x+2)+x | 10x +( x+2) | Różnica liczb | Obie liczby dwucyfrowe |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 119 | 101 | 18 | Nie |
| 8 | 108 | 90 | 18 | Nie |
| 7 | 97 | 79 | 18 | Tak |
| 6 | 86 | 68 | 18 | Tak |
| 5 | 75 | 57 | 18 | Tak |
| 4 | 64 | 46 | 18 | Tak |
| 3 | 53 | 35 | 18 | Tak |
| 2 | 42 | 24 | 18 | Tak |
| 1 | 31 | 13 | 18 | Tak |
| 0 | 20 | 2 | 18 | Nie |

| Cyfra dziesiątek liczby przed zamianą cyfr | Cyfra jedności liczby przed zamianą cyfr | Liczba przed zamianą cyfr | Liczba po zamianie cyfr |
|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 97 | 79 |
| 8 | 6 | 86 | 68 |
| 7 | 5 | 75 | 57 |
| 6 | 4 | 64 | 46 |
| 5 | 3 | 53 | 35 |
| 4 | 2 | 42 | 24 |
| 3 | 1 | 31 | 13 |
| 2 | 0 | 20 | - |
| 1 | - | - | - |
| 0 | - | - | - |

Odp. Par liczb spełniających warunki zadania jest siedem: (97,79); (86,68); (75,57); (64,46); (53,35); (42,24); (31,13).

**Zadanie 11.**

**Graniastosłup:**

**Przypadek 1.** - krawędź podstawy ma długość 10 cm, wysokość wynosi 20 cm.

$V_1 = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2000 \text{ cm}^3$

**Przypadek 2.** - krawędź podstawy ma długość 5 cm, wysokość wynosi 40 cm.

$V_2 = 5 \cdot 5 \cdot 40 = 1000 \text{ cm}^3$

**Walec:**

**Przypadek 1.** – promień podstawy ma długość $\frac{20}{\pi}$ cm, wysokość wynosi 20 cm.

$$V_3 = \pi \cdot \frac{20^2}{\pi^2} 20 = \frac{8000}{\pi} \text{ cm}^3 > 2000 \text{ cm}^3$$

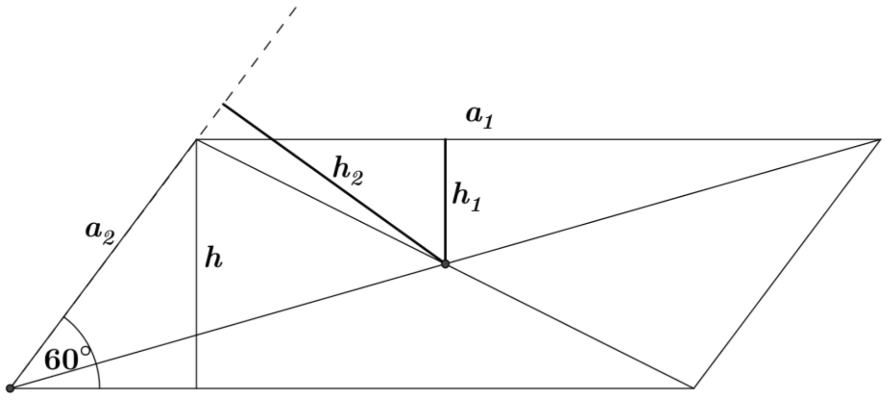
**Przypadek 2.** – promień podstawy ma długość $\frac{10}{\pi}$ cm, wysokość wynosi 40 cm.

$$V_4 = \pi \cdot \frac{10^2}{\pi^2} 40 = \frac{4000}{\pi} \text{ cm}^3 > 1000 \text{ cm}^3$$

Odp.: Najmniejszą objętość $V_2$ ma graniastosłup o wysokości 40 cm i krawędzi podstawy o długości 5 cm.

**Zadanie 12.**

I sposób




$$h = \frac{a_2\sqrt{3}}{2}$$

$$6 = \frac{a_2\sqrt{3}}{2}$$

$a_2 = 4\sqrt{3}$

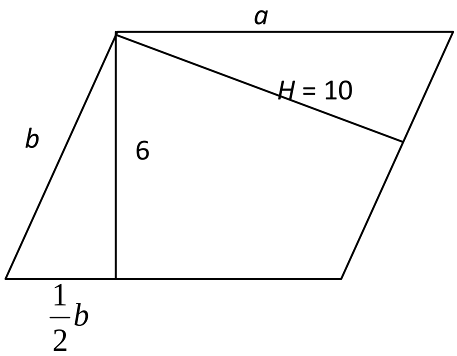
$P = a_2 h_2$

$P = 4\sqrt{3} \cdot 10$

$P = 40\sqrt{3}$

Odp. Pole równoległoboku wynosi $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

II sposób




$b^2 = \frac{1}{4}b^2 + 36$

$b = 4\sqrt{3}$

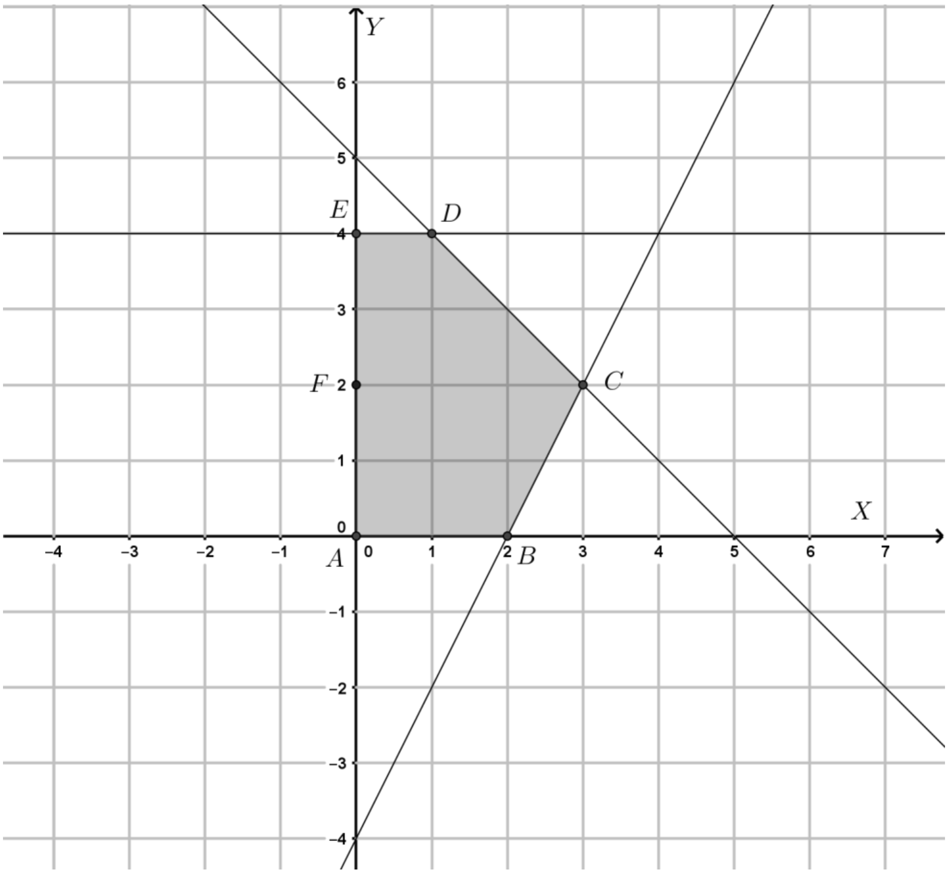
$P = bH$

$P = 4\sqrt{3} \cdot 10$

$P = 40\sqrt{3}$

Odp. Pole równoległoboku wynosi $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

**Zadanie 13.**




$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$C = (3, 2)$

$A = (0, 0)$; $B = (2, 0)$; $C = (3, 2)$; $D = (1, 4)$; $E = (0, 4)$

$$P_{ABCDE} = P_{ABCF} + P_{FCDE}$$

$$P_{ABCDE} = \frac{(2+3)}{2} \cdot 2 + \frac{(3+1)}{2} \cdot 2$$

$$P_{ABCDE} = 9$$

Odp. Pole pięciokąta wynosi 9 [$j^2$].

**Schemat punktowania:**

| Zad. | Poziom wykonania | Schemat punktowania | Liczba punktów |
|---|---|---|---|
| 10 | **Poziom 6**: pełne rozwiązanie. | Wskazanie wszystkich siedmiu par liczb spełniających warunki zadania wraz z uzasadnieniem (sprawdzeniem) tych warunków. | 3 |
| | **Poziom 4**: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Wskazanie sześciu prawidłowych par liczb spełniających warunki zadania<br>ALBO<br>podanie siedmiu pojedynczych liczb (przed zmianą cyfr lub po zmianie)<br>ALBO<br>wskazanie siedmiu prawidłowych par oraz np. (20; 2)<br>ALBO<br>podanie wszystkich siedmiu prawidłowych par BEZ uzasadnienia (sprawdzenia). | 2 |
| | **Poziom 2**: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane. | Uwzględnienie warunku dotyczącego różnicy cyfr i różnicy liczb (może być na konkretnym przykładzie). | 1 |
| | **Poziom 0**: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | | 0 |
| 11 | **Poziom 6**: pełne rozwiązanie. | Wskazanie bryły o najmniejszej objętości. | 3 |
| | **Poziom 4**: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Obliczenie objętości wszystkich czterech brył. | 2 |
| | **Poziom 2**: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane. | Obliczenie objętości dwóch brył. | 1 |
| | **Poziom 0**: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | | 0 |

| Zad. | Poziom wykonania | Schemat punktowania | Liczba punktów |
|---|---|---|---|
| 12 | **Poziom 6**: pełne rozwiązanie. | Poprawne obliczenie pola równoległoboku: $P = 40\sqrt{3}$ cm$^2$. | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Poziom 5**: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.). | Podanie poprawnej metody obliczenia pola równoległoboku. | 3 |
| | **Poziom 4**: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Obliczenia długości jednego z boków równoległoboku, przy poprawnym zaznaczeniu obydwu odległości. | 2 |
| | **Poziom 2**: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane. | Zauważenie zależności między odległością punktu przecięcia przekątnych od boku równoległoboku a wysokością trójkąta równobocznego o boku przyległym do kąta $60^o$. | 1 |
| | **Poziom 0**: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | Zauważenie zależności między odległością punktu przecięcia przekątnych od boku równoległoboku a wysokością równoległoboku. | 0 |
| **13** | **Poziom 6**: pełne rozwiązanie. | Prawidłowe obliczenie pola wielokąta: | 5 |
| | **Poziom 5**: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.). | Zastosowanie poprawnej metody obliczenia pola pięciokąta. | 4 |
| | **Poziom 4**: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia wykresów funkcji: $y = -x + 5$ i $y = 2x - 4$ ORAZ podanie współrzędnych wszystkich innych punktów potrzebnych przy metodzie stosowanej przez ucznia. | 3 |
| | **Poziom 2**: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane. | Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia wykresów funkcji: $y = -x + 5$ i $y = 2x - 4$ ALBO podanie współrzędnych wszystkich innych punktów potrzebnych przy metodzie stosowanej przez ucznia. | 2 |
| | **Poziom 1**: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania. | Wykonanie poprawnego rysunku wielokąta w układzie współrzędnych. | 1 |
| | **Poziom 0**: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | | 0 |