Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
dla uczniów gimnazjów woj. śląskiego
w roku szkolnym 2015/2016

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Etap wojewódzki

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań, przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać punkty w zależności od poziomu wykonania zadania.
- Liczba punktów umożliwiająca uzyskanie tytułu laureata co najmniej 54.

Zadanie 1.
Za każde poprawnie zapisane hasło w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 20 punktów.

							1)	**K**	W	A	D	R	A	T	
		2)	P	O	D	S	T	**A**	W	A					
							3)	**W**	A	L	E	C			
						4)	M	**I**	A	N	O	W	N	I	K
				5)	K	U	L	**A**							
						6)	T	**R**	A	P	E	Z			
7)	P	R	Z	E	K	Ą	T	**N**	A						
		8)	Ś	R	E	D	N	**I**	C	A					
				9)	T	O	N	**A**							
							10)	**S**	T	O	Ż	E	K		
	11)	O	Ś		L	I	C	**Z**	B	O	W	A			
				12)	F	U	N	**K**	C	J	A				
				13)	Z	E	R	**O**							
							14)	**C**	Z	T	E	R	Y		
			15)	P	R	Ę	D	**K**	O	Ś	Ć				
							16)	**A**	R						
			17)	D	Z	I	E	**L**	E	N	I	E			
							18)	**W**	Y	K	R	E	S		
						19)	R	**Ó**	W	N	A	N	I	E	
						20)	T	**W**	O	R	Z	Ą	C	A	

Zadania zamknięte

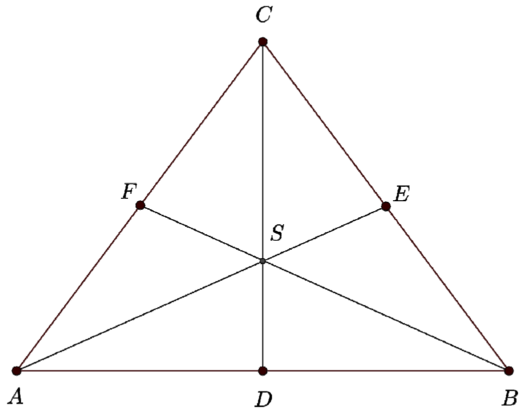
Za każde poprawnie zaznaczone wskazanie 1 punkt, czyli w sumie 24 punkty.

Zadanie	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź I	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ
Odpowiedź II	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ
Odpowiedź III	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA

Zadania otwarte

Przykładowe rozwiązania

Zadanie 10.



$|AC| = |BC| = 10$, $|AB| = 12$

AE, BF, CD – środkowe trójkąta *ABC.*

Odcinek *CD* jest wysokością trójkąta równoramiennego *ABC*, zatem trójkąt *ADC* jest trójkątem prostokątnym, w którym na podstawie twierdzenia Pitagorasa zachodzi równość: $|CD|^2 + 6^2 = 10^2$, a więc $|CD| = 8$.

Odcinek *CD* jest jednocześnie środkową trójkąta *ABC*, zatem trójkąt *ADS* jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych $|AD| = 6$ i $|DS| = \frac{8}{3}$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ASD* otrzymujemy równość $|AS|^2 = 6^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2$, a więc $|AS| = \frac{2}{3}\sqrt{97}$.

Z własności środkowych wynika, że $|AS| = \frac{2}{3}|AE|$, zatem $|AE| = \sqrt{97}$. Ponadto, ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny, więc $|BF| = |AE| = \sqrt{97}$.

Odp. Środkowe trójkąta *ABC* mają długości: 8, $\sqrt{97}$, $\sqrt{97}$.

Zadanie 11.

I sposób (analiza możliwych rozwiązań, albo metoda prób i błędów)

<u>I URNA</u>
Białych kul: $5 + x$
Czarnych kul: 10
Suma kul: $15 + x$

$P(I)=\frac{5+x}{15+x}$

<u>II URNA</u>
Białych kul: $7 + 16 - x = 23 - x$
Czarnych kul: 18
Suma kul: $41 - x$

$P(II)=\frac{23-x}{41-x}$

$$\frac{5+x}{15+x}=\frac{23-x}{41-x}$$

$x = 0$: $L=\frac{5}{15}$, $P=\frac{23}{41}$, $L \neq P$

$x = 2$: $L=\frac{7}{17}$, $P=\frac{21}{39}$, $L \neq P$

$x = 4$: $L=\frac{9}{19}$, $P=\frac{19}{37}$, $L \neq P$

$x = 5$: $L=\frac{10}{20}$, $P=\frac{18}{36}$, $L = P$

Odp.: Do pierwszej urny należy dołożyć 5 białych kul, a do drugiej 11 białych kul.

II sposób

<u>I URNA</u>
Białych kul: $5 + x$
Czarnych kul: 10
Suma kul: $15 + x$

$P(I)=\frac{5+x}{15+x}$

<u>II URNA</u>
Białych kul: $7 + 16 - x = 23 - x$
Czarnych kul: 18
Suma kul: $41 - x$

$P(II)=\frac{23-x}{41-x}$

$$\frac{5+x}{10+x}=\frac{23-x}{41-x}$$
$(5+x)(41-x)=(15+x)(23-x)$
$205x - 5x + 41x - x^2 = 345 + 23x - 15x - x^2$
$28x = 140$
$x = 5$ – do I urny
$16 - 5 = 11$ – do II urny

Odp.: Do pierwszej urny należy dołożyć 5 białych kul, a do drugiej 11 białych kul.

Zadanie 12.

I sposób

Liczba owoców w jednej skrzynce – n

Liczba skrzynek, z których sprzedano połowę owoców – x

Liczba skrzynek, z których sprzedano 1/3 owoców – y

Liczba skrzynek, które pozostały pełne – $(18 - x - y)$

$$\frac{1}{2}xn + \frac{2}{3}yn + (18 - x - y)\cdot 1n = \frac{8}{9}\cdot 18n$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + (18 - x - y) = \frac{8}{9}\cdot 18$$

$$3x + 2y = 12$$

x	$y = \frac{12-3x}{2}$	Liczby x, y przyjmują wartości całkowite, dodatnie.
1	4,5	Nie spełniają warunku
2	**3**	**Spełniają warunek**
3	1,5	Nie spełniają warunku
4	0	Nie spełniają warunku
5	$y < 0$	Nie spełniają warunku

18 – 5= 13

Odp. Pozostało 13 pełnych skrzynek owoców.

II sposób

Liczba owoców w jednej skrzynce – n

Liczba skrzynek, z których sprzedano połowę owoców – x

Liczba skrzynek, z których sprzedano 1/3 owoców – y

Liczba skrzynek, które pozostały pełne – $(18 - x - y)$

$$\frac{1}{2}xn + \frac{1}{3}yn = \frac{1}{9}\cdot 18n$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{9}\cdot 18$$

$$3x + 2y = 12$$

x	$y = \frac{12-3x}{2}$	Liczby x, y przyjmują wartości całkowite, dodatnie.
1	4,5	Nie spełniają warunku
2	**3**	**Spełniają warunek**
3	1,5	Nie spełniają warunku
4	0	Nie spełniają warunku
5	$y < 0$	Nie spełniają warunku

18 – 5= 13

Odp. Pozostało 13 pełnych skrzynek owoców.

III sposób (opisowo lub na rysunku)

Sprzedanie 1/9 części owoców oznacza:

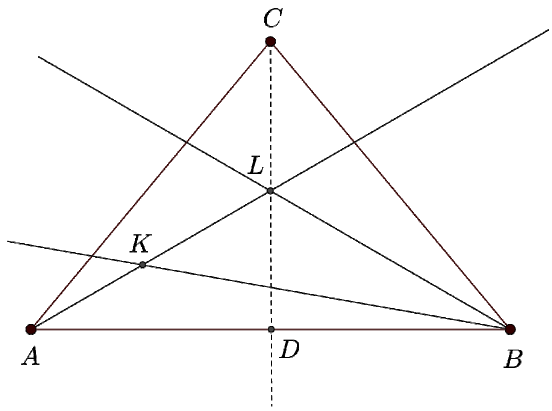
albo *sprzedanie dwóch całych skrzynek owoców* (nie ma skrzynek, z których sprzedano 1/2 lub 1/3 owoców),

albo *sprzedanie owoców z połowy czterech skrzynek* (nie ma skrzynek, z których sprzedano 1/3 owoców),

albo *sprzedanie 1/3 owoców z sześciu skrzynek* (nie ma skrzynek, z których sprzedano 1/2 owoców),

albo (zastępując dwie połówki skrzynek trzema skrzynkami opróżnionymi w 1/3) *sprzedanie owoców z połowy <u>dwóch</u> skrzynek i 1/3 owoców z <u>trzech</u> skrzynek* (pozostaje 18 – 2 – 3 = <u>13 pełnych skrzynek</u>).

Zadanie 13.



I sposób

W trójkącie *ABL:*

$|\angle ABL| = |\angle BAL| = 30^\circ$

$|\angle ALB| = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ$

Zatem ΔABL jest równoramienny i *LD* jest jego wysokością.

Z założenia trójkąt *ABC* jest równoramienny, zatem *CD* jest jego wysokością i $|\angle ACD| = |\angle BCD| = 40^\circ$.

Odcinek *LB* jest wspólnym bokiem trójkątów *BCL* oraz *BKL.*

W trójkącie *BCL:*

$|\angle LCB| = 40^\circ$,

$|\angle LBC| = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$ – kąt przyległy do boku *LB,*

$|\angle CLB| = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ$ – kąt przyległy do boku *LB.*

W trójkącie *KBL:*

$|\angle KBL| = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ – kąt przyległy do boku *LB,*

$|\angle KLB| = |\angle ALB| = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ$ – kąt przyległy do boku *LB.*

Z cechy przystawania trójkątów (kbk) wynika, że trójkąty *BCL* oraz *BKL* są przystające:

$|\angle CLB| = |\angle KLB| = 120^\circ$, $|\angle LBC| = |\angle KBL| = 20^\circ$, bok *LB* wspólny dla obu trójkątów.

II sposób

Zaznaczenie na rysunku w trójkącie ABL kątów wraz z miarami: $|\angle ABL| = |\angle BAL| = 30^\circ$.

ΔABL jest równoramienny i *LD* jest jego wysokością zawartą w wysokości *CD*.
Odcinek *LB* jest wspólnym bokiem trójkątów *BCL* oraz *BKL*.

Zaznaczenie na rysunku kątów wraz z miarami: $|\angle ACD| = |\angle BCD| = 40^\circ$.

Zaznaczenie na rysunku kątów wewnętrznych wraz z miarami w trójkątach BCL oraz *BKL*.
Z cechy przystawania trójkątów (kbk) wynika, że trójkąty *BCL* oraz *BKL* są przystające:
$|\angle CLB| = |\angle KLB| = 120^\circ$, $|\angle LBC| = |\angle KBL| = 20^\circ$, bok *LB* wspólny dla obu trójkątów.

Uwaga: zapisy kursywą oznaczają, że zapisy symboliczne i zapisy obliczeń w rozwiązaniu ucznia zastępują opisy na rysunku.

Schemat punktowania:

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Podanie, na podstawie obliczeń, długości wszystkich środkowych trójkąta *ABC*.	4 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Obliczenie długości odcinka *AS*.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisania zależności pozwalającej obliczyć długości odcinka *AS*.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Obliczenie długości odcinka *CD*.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
11	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Obliczenie, po ile białych kul należy dołożyć do każdej z urn (5, 11) ALBO sprawdzenie że liczby 5 i 11 są rozwiązaniem zadania (wystarczy nawet jedna próba, jeżeli spełnione są warunki poziomów 1 – 3).	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie równania pozwalającego na obliczenie, po ile białych kul należy dołożyć do każdej z urn ALBO zapisanie co najmniej dwóch prób odgadnięcia wyniku BEZ uzyskania tego wyniku.	3 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Zapisanie wyrażeń przedstawiających prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej po dodaniu dodatkowych kul w OBU urnach.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Zapisanie prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej po dodaniu dodatkowych kul dla JEDNEJ urny ALBO podanie poprawnego wyniku (5, 11) bez uzasadnienia.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Zauważenie, że suma kul dodanych do obu urn wynosi 16	0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
12	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Podanie liczby pozostałych pełnych skrzynek (13).	4 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Obliczenie, ile skrzynek opróżniono w 1/2 (2) ORAZ ile skrzynek opróżniono w 1/3 (3).	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Podanie metody prowadzącej do obliczenia liczby skrzynek opróżnionych w połowie i w 1/3.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Podanie analizy pokazującej ilość (liczbę albo część całości) owoców po zakończonej sprzedaży w poszczególnych rodzajach skrzynek.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
13	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Pełne uzasadnienie przystawania trójkątów *BLC* i *KBL* z powołaniem się na cechę przystawania (kbk) i wskazanie równości odpowiednich kątów i wspólnego boku.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Podanie miar kątów *CLB* i *KLB* (120°) ORAZ podanie miar kątów *LBC* i *KBL* (20°).	3 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Podanie miar kątów *CLB* i *KLB* (120°) ALBO podanie miar kątów *LBC* i *KBL* (20°) ALBO podanie miar kątów wewnętrznych jednego z trójkątów *BLC* lub *KBL*.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zauważenie, że trójkąt *ALB* jest równoramienny ORAZ zauważenie, że *LD* jest jego wysokością zawartą w wysokości *CD*.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Wykonanie rysunku pomocniczego.	0 p.