

**Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
dla uczniów gimnazjów woj. śląskiego
w roku szkolnym 2014/2015**

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Etap wojewódzki

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań, przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać punkty w zależności od poziomu wykonania zadania.
- Tytuł laureata otrzymują uczniowie, którzy uzyskali 90% lub więcej punktów możliwych do zdobycia, tzn. 54 punkty lub więcej.

Zadanie 1.

Za każdy poprawny wpis w krzyżówce – 1 punkt, sumie 16 punktów.

					1)	S	T	O	Ż	E	K																				
					2)	R	Ó	W	N	O	L	E	G	Ł	O	B	O	K													
										3)	M	E	D	I	A	N	A														
										4)	A	R	G	U	M	E	N	T													
					5)	S	Y	M	E	T	R	A	L	N	E		B	O	K	Ó	W										
										6)	O	D	C	I	N	E	K														
															7)	T	W	O	R	Z	Ą	C	A								
															8)	W	Y	K	R	E	S										
															9)	Z	E	R	O												
															10)	P	U	N	K	T											
					11)	L	I	C	Z	B	Y		C	A	Ł	K	O	W	I	T	E										
															12)	P	R	Z	Y	B	L	I	Ż	E	N	I	E				
															13)	C	I	Ę	C	I	W	A									
					14)	M	E	T	O	D	A		P	O	D	S	T	A	W	I	A	N	I	A							
															15)	O	Ś		S	Y	M	E	T	R	I	I					
															16)	P	I	E	R	W	I	A	S	T	K	O	W	A	N	I	E

Zadania zamknięte

Za każde poprawnie zaznaczone wskazanie 1 punkt, czyli w sumie 27 punktów.

Zadanie	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź I	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź II	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź III	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ

Zadania otwarte

Przykładowe rozwiązania

Zadanie 11.

Oznaczenia wspólne dla I i II sposobu:

v_{sr} - średnia prędkość rowerzysty

v_g, s, t_g – odpowiednio prędkość, droga, czas rowerzysty jadącego w górę

v_d, s, t_d – odpowiednio prędkość, droga, czas rowerzysty jadącego w dół

I sposób:

$$v_{sr} = \frac{2s}{t_g + t_d}$$

$$v_{sr} = \frac{2s}{\frac{s}{v_g} + \frac{s}{v_d}}$$

$$v_{sr} = \frac{2}{\frac{1}{v_g} + \frac{1}{v_d}}$$

$$20 = \frac{2}{\frac{1}{v_g} + \frac{1}{70}}$$

$$v_g = 11\frac{2}{3} \text{ [km/h]}$$

Odp. Średnia prędkość jazdy rowerzysty pod górę wynosiła $v_g = 11\frac{2}{3}$ [km/h]

II sposób:

$$v_g = \frac{s}{t_g} \quad (1)$$

$$70 = \frac{s}{t_d}, \quad (2)$$

$$t_d = \frac{s}{70} \quad (2')$$

$$20 = \frac{2s}{t_g + t_d} \quad (3)$$

$$2s = 20(t_g + t_d) \quad | : 2$$

$$s = 10(t_g + t_d) \quad (3')$$

Z (2') i (3') wynika, że $s = 10t_g + \frac{s}{7}$ i dalej $s = \frac{70}{6}t_g$ (4)

Z (1) i (4) otrzymujemy: $v_G = \frac{\frac{70}{6}t_g}{t_g} = \frac{70}{6} = 11\frac{2}{3}$

Odp. Średnia prędkość jazdy rowerzysty pod górę wynosiła $v_g = 11\frac{2}{3}$ [km/h]

Zadanie 12.

Istnieją trzy możliwe zbiory cyfr składających się na szukane liczby {0, 0, 1, 1, 1}, {0, 0, 0, 1, 2}, {0, 0, 0, 0, 3}.

Przy założeniu, że pierwszą cyfrą nie może być zero, otrzymujemy następujących 15 liczb spełniających warunki zadania:

{0, 0, 1, 1, 1}	{0, 0, 0, 1, 2}	{0, 0, 0, 0, 3}
11100	12000	30000
11010	10200	
11001	10020	
10110	10020	
10101	21000	
10011	20100	
	20010	
	20001	

Zadanie 13.

I sposób:

x – masa miedzi

y – masa cynku

$$\begin{cases} y + 2,5 = x \\ \frac{13}{8} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6,5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Odp. Masa stopu wynosi 10,5 kg.

II sposób

$13x$ – masa miedzi

$8x$ – masa cynku

$$8x + 2,5 = 13x$$

$$5x = 2,5$$

$$x = 0,5 \text{ kg}$$

masa miedzi: $13 \cdot 0,5 = 6,5$ kg

masa cynku: $8 \cdot 0,5 = 4$ kg

masa stopu: $6,5 + 4 = 10,5$ kg

Zadanie 14.

I sposób

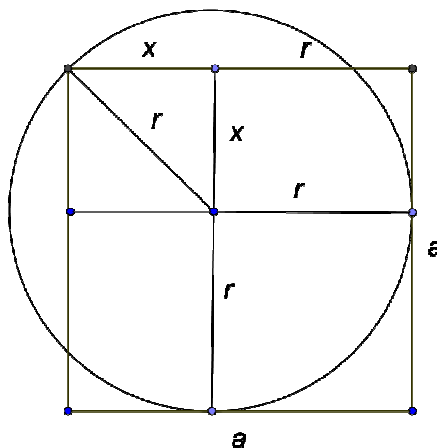
$$r = x\sqrt{2}$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$a = r + x$$

$$a = r + \frac{r}{\sqrt{2}} = r + \frac{\sqrt{2}r}{2}$$

Pole koła wynosi $P_1 = \pi r^2$.



Pole kwadratu wynosi $P_2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)r^2$

Dla porównania pól figur wystarczy porównać wartości: π oraz $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ ($\pi > 3,14$, a $\frac{3}{2} + \sqrt{2} < 2,92$).

Odp. Pole koła $P_1 = \pi r^2$ jest większe od pola kwadratu $P_2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)r^2$.

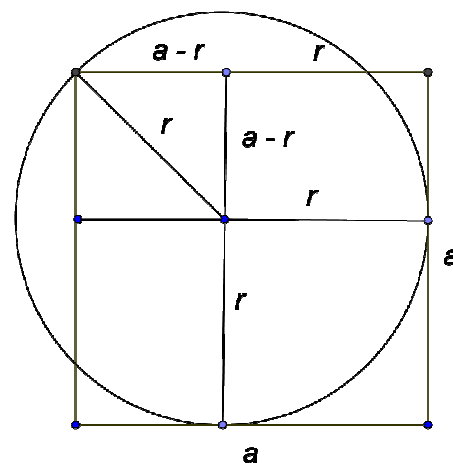
II sposób

$$r = (a - r)\sqrt{2}$$

$$a = r + \frac{r}{\sqrt{2}} = r + \frac{\sqrt{2}r}{2}$$

Pole koła wynosi $P_1 = \pi r^2$.

Pole kwadratu wynosi $P_2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)r^2$



Dla porównania pól figur wystarczy porównać wartości: π oraz $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ ($\pi > 3,14$, a $\frac{3}{2} + \sqrt{2} < 2,92$).

Odp. Pole koła $P_1 = \pi r^2$ jest większe od pola kwadratu $P_2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)r^2$.

Schemat punktowania

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
11	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Prawidłowe obliczenie prędkości: $v_g = 11\frac{2}{3}$ [km/h].	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie równania pozwalającego obliczyć v_g , np. $20 = \frac{2}{\frac{1}{v_g} + \frac{1}{70}}$ lub równoważnego.	3 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wykorzystanie wzoru na prędkość do zapisania czasów t_g, t_d za pomocą drogi i prędkości: $v_{sr} = \frac{2s}{\frac{s}{v_g} + \frac{s}{v_d}}$ ALBO (II sposób) zapisanie zależności $s = 10t_g + \frac{s}{7}$.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Zapisanie wzoru na średnią prędkość rowerzysty: $v_{sr} = \frac{2s}{t_g + t_d}$ ALBO (II sposób) zapisanie co najmniej jednego z równań (2), (3).	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Zapisanie wzoru na prędkość w ruchu jednostajnym, prostoliniowym, (II sposób) zapisanie równania (1).	0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
12	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Wymienienie wszystkich 15 liczb spełniających warunki zadania.	4 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Wymienienie co najmniej 11 liczb spełniających warunki zadania przy uwzględnieniu trzech zbiorów cyfr.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Wymienienie co najmniej 11 liczb spełniających warunki zadania, ale przy uwzględnieniu tylko dwóch zbiorów cyfr.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zauważenie trzech możliwych zbiorów cyfr składających się na szukane liczby $\{0, 0, 1, 1, 1\}$, $\{0, 0, 0, 1, 2\}$, $\{0, 0, 0, 0, 3\}$.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
13	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Prawidłowe obliczenie masy stopu.	4 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Poprawne obliczenie mas obu metali.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Wykorzystanie obu zależności pomiędzy masami metali w stopie (np. zapisanie układu równań, zapisanie jednego równania prowadzącego do obliczenia masy jednego z metali).	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zapisanie tylko jednego poprawnego równania w układzie równań ALBO zapisanie analizy zadania prowadzące do jednego równania.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
14	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Pełne uzasadnienie faktu, że pole koła jest większe niż pole kwadratu.	5 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Zapisanie pól obu figur w postaci pozwalającej na ich porównanie, np.: $P_1 = \pi r^2$, $P_2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)r^2$.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Wyznaczenie długości boku w zależności od r : $a = r + \frac{\sqrt{2}r}{2}$ albo $a = \frac{1}{2}r(\sqrt{2} + 2)$, albo $a = r + \frac{r}{\sqrt{2}}$.	3 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Ułożenie równania pozwalającego wyznaczyć długość boku a danego kwadratu albo części x tego boku.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Wykonanie rysunku z oznaczeniem długości odcinków używanych do obliczeń.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Wykonanie rysunku bez oznaczenia długości odcinków używanych do obliczeń.	0 p.