Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
dla uczniów gimnazjów woj. śląskiego
w roku szkolnym 2014/2015

Etap rejonowy

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań, przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać punkty w zależności od poziomu wykonania zadania.
- Do następnego etapu zostają zakwalifikowani uczniowie, którzy uzyskali 85% lub więcej punktów możliwych do zdobycia, tzn. 51 punktów lub więcej.

Zadanie 1.
Za każde hasło poprawnie zapisane w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 18 punktów.

			a)	**1,**	1	2	5
		b)	6	**4**			
			c)	**1**	0		
			d)	**4**	0	0	
			e)	**2**			
			f)	**1**	0		
			g)	**3**	0	0	
		h)	2	**5**	6		
		i)	5	**6**			
		j)	1	**2**	1		
			k)	**3**	0		
			l)	**7**	5		
			m)	**3**	0		
	n)	1	2	**0**			
		o)	–	**9**	9		
		p)	1	**5**			
q)	1	0	0	**0**			
		r)	3	**4**	5	6	

Zadania zamknięte

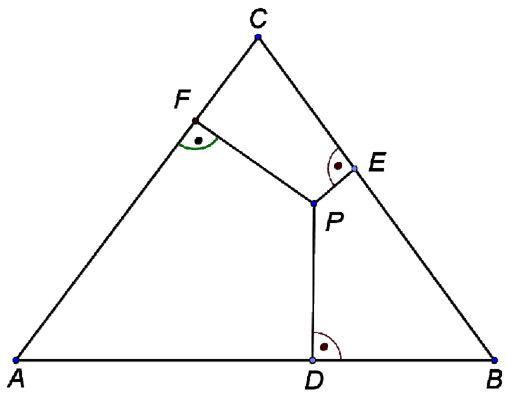
Za każde poprawnie zaznaczone wskazanie 1 punkt, czyli w sumie 24 punkty.

Zadanie	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Odpowiedź I	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź II	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ
Odpowiedź III	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ

Zadania otwarte

Przykładowe rozwiązania:

Zadanie 10.



a – długość boku trójkąta *ABC*

Pole trójkąta *ABC* można zapisać dwoma sposobami:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)$$

Z równania $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}a\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)$ otrzymujemy $a=20$.

$$P_{\Delta ABC}=\frac{20^2\sqrt{3}}{4}=100\sqrt{3}$$

Odp. Pole trójkąta *ABC* jest równe $100\sqrt{3}$ j^2.

Zadanie 11.

I sposób

	Dzisiaj	**Za pięć lat**
Wiek syna	*x*	*x* + 5
Wiek ojca	*x* + 20	*x* + 25

$(x+5)\cdot n=x+25$, gdzie *n* jest liczbą całkowitą dodatnią, *x* jest liczbą całkowitą nieujemną

$$n=\frac{x+25}{x+5}=\frac{x+5}{x+5}+\frac{20}{x+5}=1+\frac{20}{x+5}$$

Z warunków zadania wynika, że mianownik $x+5$ musi być dzielnikiem liczby 20, zatem *x* może przyjmować wartości: 0, 5, 15.

Odp. Są trzy możliwości wieku odpowiednio syna i ojca: 0 i 20 lat, 5 i 25 lat, 15 i 35 lat.

II sposób (metoda prób i błędów – przykład zapisu)

Wiek syna dzisiaj	**Wiek ojca dzisiaj**	**Wiek syna za 5 lat**	**Wiek ojca za 5 lat**	**Iloraz wieku ojca i syna za 5 lat**
0	20	5	25	5 – liczba naturalna
1	21	6	26	26/6 – nie jest liczbą naturalną
2	22	7	27	27/7 – nie jest liczbą naturalną
3	23	8	28	28/8 – nie jest liczbą naturalną
4	24	9	29	29/9 – nie jest liczbą naturalną
5	25	10	30	3 – liczba naturalna
…	…	…	…	…
10	30	15	35	35/15 – nie jest liczbą naturalną
15	35	20	40	2 – liczba naturalna
20	40	25	45	45/25 = 1,80
25	45	30	50	50/30 = 1,66…
30	50	35	55	55/35 = 1,57…
35	55	40	60	60/40 = 1,5

Iloraz wieku ojca i syna maleje i jest liczbą mniejszą od 2.

Odp. Są trzy możliwości wieku odpowiednio syna i ojca: 0 i 20 lat, 5 i 25 lat, 15 i 35 lat.

III sposób

x – wiek syna

$n = \frac{x+25}{x+5}$**,** n – naturalna wielokrotność i $n \geq 2$, (n = 1 jest niemożliwe ponieważ $x + 25 \neq x + 5$, dla dowolnego x)

$x + 25 \geq 2(x+5)$ stąd $x \leq 15$ (sprawdzanie możliwości ogranicza się do 16 przypadków)

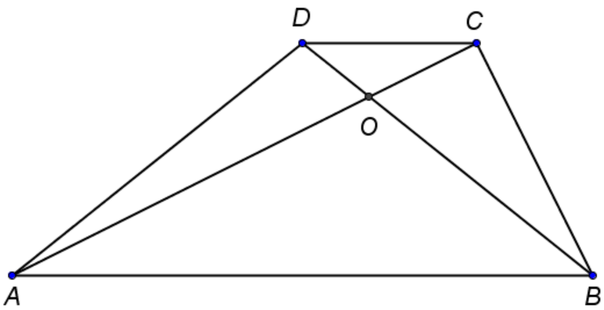
x	***n***
1	4,3
2	3,9
3	3,5
4	3,2
5	**3,0**
6	2,8
7	2,7
8	2,5
9	2,4
10	2,3
11	2,3
12	2,2
13	2,1
14	2,1
15	**2,0**
0	**5**

albo

x	***n***
1	4,…
2	3,…
3	3,5
4	
5	**3**
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	2,…
15	**2**
0	**5**

Odp. Są trzy możliwości wieku odpowiednio syna i ojca: 0 i 20 lat, 5 i 25 lat, 15 i 35 lat.

Zadanie 12.



$\Delta ABO \sim \Delta CDO$, bo $|\angle OAB| = |\angle OCD|$ oraz $|\angle ABO| = |\angle CDO|$

$\frac{P_{\Delta ABO}}{P_{\Delta CDO}} = \frac{20}{5} = 4 = k^2$, gdzie k jest skalą podobieństwa trójkątów.

Zatem $k = 2$.

Oznaczając w ΔABO długość podstawy AB przez a oraz długość wysokości opuszczonej na tę podstawę przez h, otrzymujemy zależność: $P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}ah = 20$. Stąd $ah = 40$.

Z podobieństwa trójkątów wynika, że w ΔCDO długość podstawy CD wynosi $\frac{1}{2}a$ natomiast długość wysokości opuszczonej na tę podstawę wynosi $\frac{1}{2}h$.

$$P_{ABCD} = \frac{a + \frac{1}{2}a}{2} \cdot \left(h + \frac{1}{2}h\right) = \frac{9}{8}ah = \frac{9}{8} \cdot 40 = 45$$

Odp. Pole trapezu $ABCD$ wynosi 45 j^2.

Zadanie 13.

$$36^{51} + 9^{50} - 6^{100} + 3^{102} = 6^{102} + 3^{100} - 6^{100} + 3^{102} = 6^{100}(6^2 - 1) + 3^{100}(1 + 3^2) =$$

$$= 6^{100} \cdot 35 + 3^{100} \cdot 10 = 5 \cdot \underbrace{(6^{100} \cdot 7 + 3^{100} \cdot 2)}_{\text{liczba naturalna}}$$

Zadanie 14.

Oznaczenia:

a, b – długości boków danego prostokąta, *P* – pole danego prostokąta

$a+\frac{p}{100}a, \quad b-\frac{p}{100}b$ - długości boków nowego prostokąta, *P’* – pole nowego prostokąta

$$P = ab$$

$$P' = \left(a+\frac{p}{100}a\right)\left(b-\frac{p}{100}b\right) = ab\left(1-\frac{p^2}{10000}\right)$$

$$P' = \frac{3}{4}P$$

$$ab\left(1-\frac{p^2}{10000}\right) = \frac{3}{4}ab$$

$$\left(1-\frac{p^2}{10000}\right) = \frac{3}{4}$$

$$p = 50$$

Odp. Długości boków danego prostokąta zmieniono o 50%.

Schemat punktowania

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Poprawne obliczenie pola trójkąta równobocznego.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Poprawne obliczenie boku trójkąta równobocznego.	3 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Zapisanie zależności (np. równania) pozwalającej na obliczenie boku trójkąta równobocznego.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zauważenie, że trójkąt równoboczny jest sumą trójkątów o wspólnym wierzchołku P i znanych wysokościach.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Zapisanie wzoru na pole trójkąta równobocznego.	0 p.
11	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	1) Prawidłowe podanie trzech możliwości wieku syna i ojca wynikające z obliczeń (analizy wyrażenia algebraicznego). 2) W metodzie prób i błędów prawidłowe podanie trzech możliwości wieku syna i ojca i uzasadnienie, że są to wszystkie możliwości (np. przez zauważenie, że dla wieku syna większego od 15 iloraz wieku ojca i syna jest mniejszy od 2 i maleje.	4 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	1) Prawidłowe obliczenie trzech możliwości wieku tylko jednej z osób ALBO prawidłowe podanie dwóch możliwości wieku syna i ojca, z pominięciem przypadku 0 i 20 lat, wynikające z obliczeń (analizy wyrażenia algebraicznego). 2) W metodzie prób i błędów prawidłowe podanie trzech możliwości wieku syna i ojca i podjęcie próby uzasadnienia, że są to wszystkie możliwości. ALBO prawidłowe podanie dwóch możliwości wieku syna i ojca, z pominięciem przypadku 0 i 20 lat, i uzasadnienie, że są to wszystkie możliwości (np. przez zauważenie, że dla wieku syna większego od 15 iloraz wieku ojca i syna jest mniejszy od 2 i maleje.	3 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
11 cd.	**Poziom 3**: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	1) Wskazanie metody ustalenia wieku syna i ojca (np. przekształcenie równania do postaci z ilorazem) BEZ obliczania wieku ALBO podanie co najmniej jednej możliwości wieku syna i ojca. 2) W metodzie prób i błędów prawidłowe podanie trzech możliwości wieku syna i ojca bez podjęcia próby uzasadnienia, że są to wszystkie możliwości.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	1) Zapisanie zależności prowadzącej do wskazania metody ustalenia wieku syna i ojca (np. zapisanie równania). 2) W metodzie prób i błędów prawidłowe podanie co najmniej jednej możliwości wieku syna i ojca.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
12	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Poprawne obliczenie pola trapezu.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie wzoru na pole trapezu z wykorzystaniem pola jednego z trójkątów ALBO poprawne obliczenie pola trapezu BEZ uzasadnienia podobieństwa trójkątów.	3 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zastosowanie skali podobieństwa do zapisania zależności pomiędzy podstawami i wysokościami trójkątów podobnych ALBO zapisanie wzoru na pole trapezu z wykorzystaniem pola jednego z trójkątów BEZ uzasadnienia podobieństwa trójkątów.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Uzasadnienie podobieństwa trójkątów: *ABO i CDO* ALBO zapisanie pola trapezu z wykorzystaniem podstaw i wysokości trójkątów: *ABO, CDO.* ALBO zastosowanie skali podobieństwa do zapisania zależności pomiędzy podstawami i wysokościami trójkątów podobnych BEZ uzasadnienia podobieństwa trójkątów.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Zapisanie wzoru na pole trapezu.	0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
13	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Przekształcenie wyrażenia do postaci iloczynu liczby 5 i liczby naturalnej ALBO za poprawne uzasadnienie otrzymanego wyniku cechą podzielności przez 5.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Wykorzystanie własności potęg do przekształcenia wyrażenia do postaci sumy iloczynów zawierających czynnik, którego podzielność przez 5 można efektywnie sprawdzić ALBO wykorzystanie cyfr jedności z potęg do utworzenia cyfry jedności w podanym wyrażeniu.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Przekształcenie wyrażenia do postaci sumy potęg liczb 3 i 6 ALBO poprawne wskazanie cyfr jedności w potęgach występujących w wyrażeniu.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
14	**Poziom 6**: pełne rozwiązanie.	Obliczenie procentu, o jaki zmieniono wymiary boków prostokąta.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie zależności pozwalającej na obliczenie *p*. ALBO ułożenie równania z jednolitym wyrażeniem wielkości procentowych.	2p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wykorzystanie zależności pomiędzy długościami boków prostokątów do zapisania wzoru na pole nowego prostokąta ALBO ułożenie równanie z uwzględnieniem zmian boków.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Zapisanie zależności pomiędzy długościami boków prostokątów.	0 p.