

Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki dla uczniów gimnazjów woj. śląskiego w roku szkolnym 2013/2014

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Finał wojewódzki

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać proporcjonalnie mniej punktów, niż wynosi ich maksymalna liczba dla tego zadania.
- Laureatami zostają uczniowie, którzy uzyskali 90% lub więcej punktów możliwych do zdobycia, tzn. 54 punkty lub więcej.

Zadanie 1.

Za każde hasło poprawnie zapisane w krzyżówce przyznajemy 1 punkt, czyli w sumie 21 punktów.

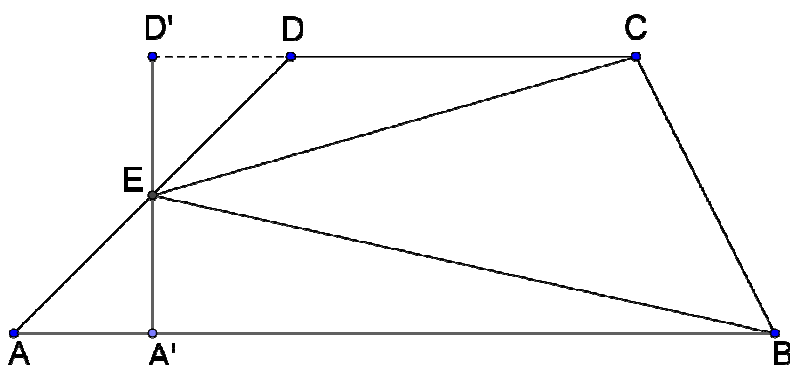
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|-----|----|---|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|---|----------|---|---|---|---|---|---|--|--|
| 1) | P | R | Z | Y | S | T | A | W | A | N | I | E | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 2) | O | D | C | I | N | E | K | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 3) | I | L | O | R | A | Z | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | 4) | J | E | D | N | O | M | I | A | N | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 5) | M | E | D | I | A | N | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6) | P | R | A | W | D | O | P | O | D | O | B | I | E | Ń | S | T | W | O | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 7) | D | O | D | A | W | A | N | I | E | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 8) | S | Y | M | E | T | R | A | L | N | A | | B | O | K | U | | | | | |
| | | | | | | | | | | | 9) | W | A | L | E | C | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | 10) | P | U | N | K | T | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | 11) | Ś | R | E | D | N | I | C | A | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | 12) | W | Y | C | I | N | E | K | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | 13) | R | E | D | U | K | C | J | A | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 14) | P | R | O | P | O | R | C | J | A | | | | |
| 15) | C | Z | W | O | R | O | Ś | C | I | A | N | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 16) | W | I | E | R | Z | C | H | O | Ł | E | K | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | 17) | K | U | L | A | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | 18) | S | T | O | P | I | E | Ń | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | 19) | D | W | U | S | I | E | C | Z | N | A | | K | Ą | T | A | | |
| 20) | D | Z | I | E | L | N | I | K | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | 21) | I | L | O | C | Z | Y | N | | | | | | | |

Zadania zamknięte - klucz

| Zadanie | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Odpowiedź I | PRAWDA | PRAWDA | FAŁSZ | PRAWDA | FAŁSZ | FAŁSZ | FAŁSZ | PRAWDA |
| Odpowiedź II | PRAWDA | FAŁSZ | FAŁSZ | FAŁSZ | FAŁSZ | PRAWDA | PRAWDA | FAŁSZ |
| Odpowiedź III | PRAWDA | PRAWDA | PRAWDA | FAŁSZ | PRAWDA | PRAWDA | PRAWDA | FAŁSZ |

Zadania otwarte – przykładowe rozwiązania

Zadanie 10.



I sposób

h_T – wysokość trapezu $ABCD$

$|D'E| = |A'E| = \frac{1}{2}h_T$ (bo trójkąty $AA'E$ oraz $DD'E$

są przystające)

$$P_{\Delta DCE} = \frac{1}{4}h_T \cdot |DC|$$

$$P_{\Delta ABE} = \frac{1}{4}h_T \cdot |AB|$$

$$P_{\Delta DCE} + P_{\Delta ABE} = \frac{1}{4}h_T (|DC| + |AB|) = \frac{1}{2}P_{ABCD}$$

$$P_{ABCD} = P_{BCE} + (P_{DCE} + P_{ABE})$$

$$P_{ABCD} = P_{BCE} + \frac{1}{2}P_{ABCD}$$

$$P_{BCE} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$$

$$P_{BCE} = (P_{DCE} + P_{ABE})$$

II sposób

$|AE| = |ED|$ (bo trójkąty $AA'E$ oraz $DD'E$ są przystające)

Po obrocie trójkąta ABE wokół punktu E o kąt 180° powstaje trójkąt o podstawie $|AB| + |DC|$ i wysokości $|D'E|$.

$$P_{\Delta ABE + \Delta DCE} = \frac{1}{4}h_T \cdot (|AB| + |DC|) = \frac{1}{2}P_{ABCD}$$

Dalej rozumujemy jak w sposobie I.

Zadanie 11. $2r$ – długość boku mniejszego trójkąta h – długość wysokości mniejszego trójkąta

Trójkąty są podobne w skali 1:3.

I sposób

$$V_m = \frac{1}{3} \pi r^2 h - \text{objętość mniejszego stożka}$$

$$V_w = \frac{1}{3} \pi (3r)^2 3h - \text{objętość większego stożka}$$

$$V_m + V_w = 1000$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h \cdot (1 + 27) = 1000$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1000}{28}$$

$$V_m = \frac{1000}{28}, V_w = \frac{27000}{28}$$

II sposób

Objętości brył podobnych w skali 1:3 pozostają w stosunku 1:27.

$$\frac{V_m}{V_w} = \frac{1}{27}$$

$$V_w = 27V_m$$

$$V_m + V_w = 1000$$

$$V_m + 27V_m = 1000$$

$$V_m = \frac{1000}{28}, V_w = \frac{27000}{28}$$

Odp. Objętości brył wynoszą $V_m = \frac{1000}{28} = 35\frac{5}{7} \text{ cm}^3$ oraz $V_w = \frac{27 \cdot 1000}{28} = 964\frac{2}{7} \text{ cm}^3$.**Zadanie 12.** x – liczba losów wygrywających, które należy dodać

| | Przed zmianą liczby losów | Po zmianie liczby losów |
|-----------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| Liczba losów wygrywających | 10% z 2500 = 250 | 250 + x |
| Liczba wszystkich losów | 2500 | 2500 + x |

$$250 + x = 0,25 \cdot (2500 + x)$$

$$x = 500$$

Odp. Należy dodać 500 losów.

Zadanie 13.

| Ostatnie cyfry potęg liczby 2013 | Ostatnie cyfry potęg liczby 2014 | Ostatnia cyfra potęg liczby 2015 |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 3, 9, 7, 1 | 4, 6 | 5 |

2013 : 4 = 503 r. 1, zatem ostatnia cyfra liczby 2013^{2013} wynosi **3**.

2014 : 2 = 507 r. 0, zatem ostatnia cyfra liczby 2014^{2014} wynosi **6**.

Ostatnia cyfra liczby 2015^{2015} wynosi **5**.

$$3 + 6 + 5 = 14$$

Odp. Ostatnia cyfra sumy $2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015}$ wynosi **4**.

Zadanie 14.

s – odległość od przystani A do przystani B

t_r – czas przepływu rzeki z przystani A do przystani B

v_s – prędkość własna statku

v_r – prędkość nurtu rzeki

$v_s + v_r$ – prędkość rzeczywista statku płynącego z prądem rzeki od przystani A do przystani B

$v_s - v_r$ – prędkość rzeczywista statku płynącego pod prąd rzeki od przystani B do przystani A

I sposób

$$(v_s + v_r) \cdot 5 = (v_s - v_r) \cdot 7 = s$$

$$v_r = \frac{s}{t_r}$$

$$\left(v_s + \frac{s}{t_r}\right) \cdot 5 = \left(v_s - \frac{s}{t_r}\right) \cdot 7$$

$$v_s = 6 \cdot \frac{s}{t_r}$$

$$(v_s + v_r) \cdot 5 = s$$

$$\left(6 \cdot \frac{s}{t_r} + \frac{s}{t_r}\right) \cdot 5 = s$$

$$t_r = 35 [h]$$

II sposób

$$\begin{cases} v_s + v_r = \frac{s}{5} \\ v_s - v_r = \frac{s}{7} \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} v_s + v_r = \frac{s}{5} \\ -v_s + v_r = -\frac{s}{7} \end{cases} \quad | +$$

$$2v_r = \frac{s}{5} - \frac{s}{7}$$

$$2v_r = \frac{2s}{35}$$

$$v_r = \frac{s}{35}$$

$$t_r = \frac{s}{v_r} = 35 [h]$$

Odp. Czas przepływu rzeki z przystani A do przystani B wynosi 35 godzin.

Zadania otwarte – schemat punktowania

| Zad. | Poziom wykonania | Schemat punktowania | Liczba punktów |
|-----------|--|---|----------------|
| 10 | Poziom 6: pełne rozwiązanie. | Uzasadnienie równości pól. | 3 |
| | Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Wykazanie, że suma pól trójkątów <i>ABE</i> i <i>ECD</i> jest równa polu trójkąta <i>BCE</i> . | 2 |
| | Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane. | Zauważenie, że trójkąt <i>ABE</i> i <i>ECD</i> mają równe wysokości. | 1 |
| | Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | | 0 |
| 11 | Poziom 6: pełne rozwiązanie. | Obliczenie objętości obu brył. | 3 |
| | Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Wykorzystanie faktu, że suma objętości brył wynosi 1000 cm^3 , do zapisania równania typu: $\frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi (3r)^2 \cdot 3h = 1000$ ALBO wyznaczenie objętości tylko jednej z brył jako $\frac{1}{28}$ lub $\frac{27}{28}$ części z 1000 cm^3 . | 2 |
| | Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane. | Zauważenie, że objętości powstałych brył pozostają w stosunku 1:27 ALBO zapisanie wzorów na objętości obu brył z wykorzystaniem skali podobieństwa trójkątów. | 1 |
| | Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | Zapisanie wzoru na objętość stożków bez uwzględnienia informacji o skali podobieństwa trójkątów. | 0 |
| 12 | Poziom 6: pełne rozwiązanie. | Prawidłowe obliczenie liczby losów, które należy dołożyć. | 2 |
| | Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Ułożenie równania pozwalającego obliczyć liczbę losów, które należy dołożyć. | 1 |
| | Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | Zauważenie, że o tę samą ilość wzrośnie liczba losów wygrywających i wszystkich losów. Obliczenie liczby losów wygrywających przed dokonaniem zmiany. | 0 |

| Zad. | Poziom wykonania | Schemat punktowania | Liczba punktów |
|------|--|---|----------------|
| 13 | Poziom 6: pełne rozwiązanie. | Wyznaczenie (z uzasadnieniem) ostatniej cyfry całej sumy | 3 |
| | Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Wskazanie (z uzasadnieniem), ostatnich cyfr poszczególnych składników sumy: $2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015}$. | 2 |
| | Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania. | Wskazanie wszystkich przypadków ostatnich cyfr potęg liczb 2013, 2014, 2015. | 1 |
| | Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | | 0 |
| 14 | Poziom 6: pełne rozwiązanie. | Prawidłowe obliczenie czasu przepływu rzeki z przystani <i>A</i> do przystani <i>B</i> . | 4 |
| | Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.). | Wykorzystanie zależności $v_r = \frac{s}{t_r}$ do ułożenia równania pozwalającego obliczyć prędkość rzeki. | 3 |
| | Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne. | Obliczenie stosunku prędkości własnej statku do prędkości nurtu rzeki LUB obliczenie v_r (v_s) w zależności od drogi s . | 2 |
| | Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane. | Określenie rzeczywistej prędkości statku płynącego z <i>A</i> do <i>B</i> oraz z <i>B</i> do <i>A</i> (jako sumy albo różnicy prędkości własnej statku i nurtu rzeki) LUB ułożenie układu równań. | 1 |
| | Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania. | | 0 |