

**Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
dla uczniów gimnazjów woj. śląskiego
w roku szkolnym 2013/2014**

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Etap rejonowy

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać proporcjonalnie mniej punktów, niż wynosi ich maksymalna liczba dla tego zadania.
- Do następnego etapu zostają zakwalifikowani uczniowie, którzy uzyskali 85% lub więcej punktów możliwych do zdobycia, tzn. 51 punktów lub więcej.

Zadanie 1.

a)	2	7	2,			
b)		1				
c)		8				
d)		2	0	0	0	
e)		8				
f)		1	1	1		
g)		8				
h)	1	6	2	4	3	6
i)		8				
j)	1	4				
k)	1	5				
l)	9	9	9	9		
m)	1	0	1			
n)		4	0	0		
o)	3	5	1			
p)	1	2	4			
q)		3				

Za każde hasło poprawnie zapisane w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 17 punktów.

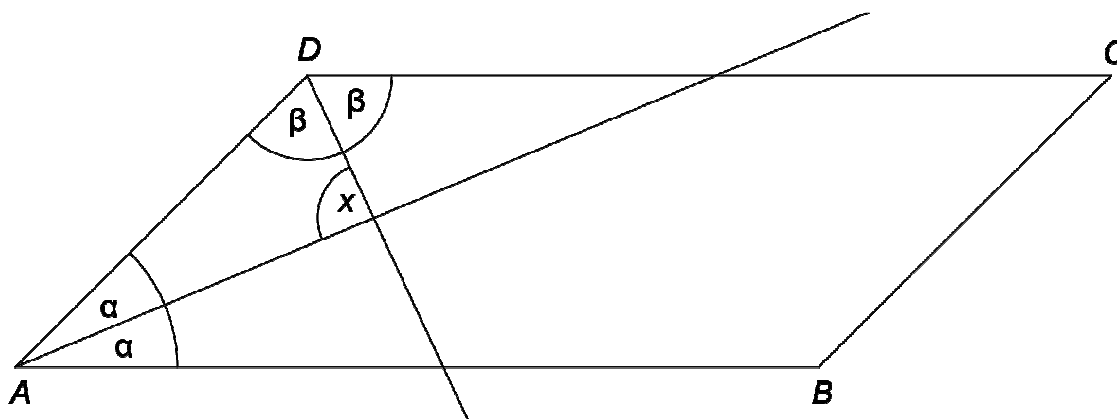
Zadania zamknięte

Zadanie	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź I	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ
Odpowiedź II	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź III	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ

Zadania otwarte

Przykładowe rozwiązania

Zadanie 10.



Suma miar dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych równoległoboku wynosi 180° .

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° .

$$\alpha + \beta + x = 180^\circ$$

$$90^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 90^\circ$$

Zadanie 11.**I sposób**

	Wczoraj	Dzisiaj
Liczba uczniów obecnych	$8x$	$8x + 1$
Liczba uczniów nieobecnych	x	$0,08(8x + 1)$

$$8x + x = 8x + 1 + 0,08(8x + 1)$$

$$x = 3$$

$$8 \cdot 3 + 3 = 27$$

Odp. Liczba wszystkich uczniów wynosi 27.

II sposób

	Wczoraj	Dzisiaj
Liczba uczniów obecnych	$8x$	$8x + 1$
Liczba uczniów nieobecnych	x	$x - 1$

$$x - 1 \text{ — } 8\%$$

$$8x + 1 \text{ — } 100\%$$

$$8(8x + 1) = 100(x - 1)$$

$$x = 3$$

$$8 \cdot 3 + 3 = 27$$

Odp. Liczba wszystkich uczniów wynosi 27.

Zadanie 12.

$$P_K = \pi(5r)^2 = 25\pi r^2$$

$$P_P = \pi(4r)^2 - \pi(3r)^2 = 7\pi r^2$$

$$P = \frac{P_P}{P_K} = \frac{7}{25}$$

Odp. Prawdopodobieństwo trafienia w zacienioną część tarczy wynosi $\frac{7}{25}$.

Zadanie 13

Oznaczmy przez:

P_F – pole figury ograniczonej okręgami i prostą

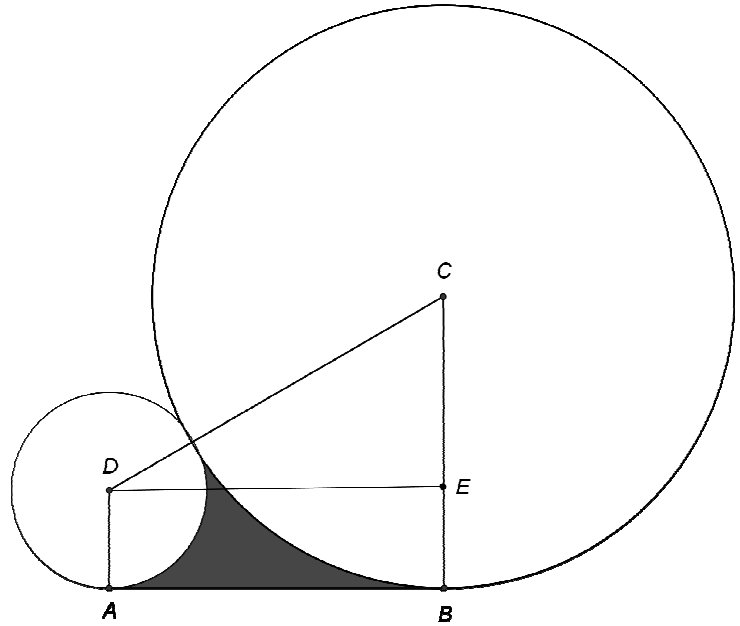
P_T – pole trapezu $ABCD$

P_{W2} – pole wycinka koła o promieniu 2 cm, wewnątrz trapezu

P'_{W6} – pole wycinka koła o promieniu 6 cm, na zewnątrz trapezu

P'_{W2} – pole wycinka koła o promieniu 2 cm, na zewnątrz trapezu

P_{W6} – pole wycinka koła o promieniu 6 cm, wewnątrz trapezu



Trójkąt CDE to połowa trójkąta równobocznego, stąd:

$$\angle ADC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\angle BCD = 60^\circ$$

$$|DE| = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

Zatem:

I wersja:

$$P_F = P_T - (P_{W2} + P_{W6})$$

$$P_F = \frac{(2+6)}{2} \cdot 4\sqrt{3} - \left(\frac{120}{360} \cdot 2^2 \pi + \frac{60}{360} \cdot 6^2 \pi \right)$$

$$P_F = 16\sqrt{3} - 7\frac{1}{3}\pi \text{ [cm]} \text{ ALBO } P_F \approx 4,65 \text{ [cm}^2\text{]}$$

II wersja:

$$P_F = P_T + P'_{W2} + P'_{W6}$$

$$P_F = \frac{(2+6)}{2} \cdot 4\sqrt{3} + \frac{240}{360} \cdot 2^2 \pi + \frac{300}{360} \cdot 6^2 \pi$$

$$P_F = \left(16\sqrt{3} + 32\frac{2}{3}\pi \right) \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Pole figury ograniczonej okręgami i prostą wynosi:

I wersja $16\sqrt{3} - 7\frac{1}{3}\pi \text{ [cm}^2\text{]} \approx 4,65 \text{ [cm}^2\text{]}$

II wersja $P_F = \left(16\sqrt{3} + 32\frac{2}{3}\pi \right) \text{ [cm}^2\text{]}$

Zadanie 14. $20 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 1 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{20}\right) = \left(\frac{2 \cdot 2}{4}\right) \cdot 5 = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{10}\right)$

Stąd z warunku $(x+y)(x-y)=20$ wynika 12 przypadków do rozważenia:

$x+y=$	$x-y=$	$x+y=$	$x-y=$	$x+y=$	$x-y=$
1	20	4	5	2	10
20	1	5	4	10	2
-1	-20	-4	-5	-2	-10
-20	-1	-5	-4	-10	-2

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=10,5 \\ y=9,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=20 \end{cases} \quad \begin{cases} x=10,5 \\ y=-9,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-20 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-10,5 \\ y=9,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-20 \\ x-y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-10,5 \\ y=-9,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4,5 \\ y=-0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4,5 \\ y=0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4,5 \\ y=0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4,5 \\ y=-0,5 \end{cases}$$

Powyższe rozwiązania równania nie są liczbami całkowitymi.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -10 \\ x - y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$$

Odp. Równanie ma cztery rozwiązania w liczbach całkowitych: $(6, -4)$; $(6, 4)$; $(-6, 4)$; $(-6, -4)$.

Schemat punktowania

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Uzasadnienie, że $\alpha + \beta = 90^\circ$ ORAZ uzasadnienie, że $x = 90^\circ$.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Uzasadnienie, że $\alpha + \beta = 90^\circ$ ALBO uzasadnienie, że $x = 90^\circ$ przy założeniu (niekoniecznie udowodnionym), że $\alpha + \beta = 90^\circ$	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
11	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Obliczenie liczby wszystkich uczniów.	4 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Obliczenie liczby uczniów obecnych lub nieobecnych w jednym z dni ALBO obliczenie liczby wszystkich uczniów, ale z błędami rachunkowymi.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Ułożenie równania/układu równań/wyrażenia pozwalającego na wyliczenie liczby uczniów obecnych lub nieobecnych w jednym z dni, ale <u>BEZ</u> tego obliczenia ALBO ułożenie równania/układu równań/wyrażenia pozwalającego na wyliczenie liczby uczniów obecnych lub nieobecnych w jednym z dni ORAZ wykonanie obliczenia, ale <u>z błędami innymi niż rachunkowe</u> (np. w metodzie rozwiązania równania/układu równań).	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wykorzystano zależności pomiędzy liczbą uczniów obecnych i nieobecnych <u>w obu dniach</u> (np. analiza zadania bez ułożenia równania albo z ułożeniem błędnego równania/układu równań/innego wyrażenia).	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
12	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Obliczenie prawdopodobieństwa.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Obliczenie pola zacienionego pierścienia ORAZ obliczenie pola koła tarczy BEZ obliczenia prawdopodobieństwa ALBO obliczenie pola zacienionego pierścienia ORAZ podanie sposobu obliczenia prawdopodobieństwa BEZ obliczenia pola koła tarczy.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Obliczenie pól obu kół potrzebnych do obliczenia pola pierścienia BEZ podania sposobu obliczenia pola pierścienia.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.	Obliczenie pola koła tarczy	0 p.
13	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Obliczenie pola zacienionej figury	5 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Zapisanie wyrażenia pozwalającego na obliczenie pola figury F ALBO obliczenie pola figury F z błędami rachunkowymi.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Prawidłowe obliczenie pola P_T oraz jednej z par pól P_{W_2} i P_{W_6} lub P'_{W_2} i P'_{W_6} ALBO zapisanie wyrażenia pozwalającego na obliczenie pola figury F, z błędami merytorycznymi w obliczeniu co najmniej jednego ze składników.	3 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Prawidłowe obliczenie co najmniej jednego z pól: P_{W_2} lub P_{W_6} , lub P_T .	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zauważenie, że $P_F = P_T - P_{W_2} + P_{W_6}$ lub $P_F = P_T + P'_{W_2} + P'_{W_6}$ ALBO Zauważenie, że trójkąta CDE jest połową trójkąta równobocznego (również poprzez podanie miar kątów) ALBO obliczenie wysokości trapezu	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
14	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Przeanalizowanie wszystkich przypadków i wskazanie par liczb spełniających warunki zadania.	5 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Przeanalizowanie wszystkich przypadków, ALE niewskazanie lub wskazanie niepełne/niewłaściwe par liczb spełniających warunki zadania.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Przeanalizowanie co najmniej połowy przypadków (np. tylko dla liczb naturalnych, nieuwzględnienie przemienności mnożenia, inne przypadki pominięcia części iloczynów wynikających z rozkładu na czynniki) ORAZ wskazanie wśród nich wszystkich rozwiązań spełniających warunki zadania.	3 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Przeanalizowanie co najmniej jednego przypadku i wskazanie, czy obliczona para liczb spełnia warunki zadania.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Zapisanie warunków zadania w postaci równania.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.