

**Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
dla uczniów gimnazjów woj. śląskiego
w roku szkolnym 2013/2014**

Przykładowe rozwiązania zadań i schemat punktowania

Etap szkolny

Przy punktowaniu zadań otwartych należy stosować następujące ogólne reguły:

- Oceniamy rozwiązania zadań zgodnie z podanym niżej schematem, tzn. przyznajemy daną liczbę punktów, jeżeli rozwiązanie zawiera wszystkie wskazane na danym poziomie elementy.
- Punktując rozwiązania zadań przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać proporcjonalnie mniej punktów, niż wynosi ich maksymalna liczba dla tego zadania.
- Do następnego etapu zostają zakwalifikowani uczniowie, którzy uzyskali 85% lub więcej punktów możliwych do zdobycia, tzn. 51 punktów lub więcej.

Zadanie 1.

Za każde hasło poprawnie zapisane w krzyżówce 1 punkt, czyli w sumie 20 punktów.

1.	K	I	L	O	M	E	T	R											
2.	W	Y	K	Ł	A	D	N	I	K										
				3.	R	O	M	B											
			4.	B	I	L	I	O	N										
5.	R	O	Z	W	A	R	T	Y											
6.	R	Ó	W	N	A	N	I	E											
	7.	W	I	E	R	Z	C	H	O	Ł	E	K							
	8.	S	Y	M	E	T	R	I	A										
	9.	M	I	E	J	S	C	E		Z	E	R	O	W	E				
10.	P	R	O	M	I	E	Ń												
11.	M	I	A	N	O	W	N	I	K										
					12.	W	S	P	Ó	Ł	R	Z	Ę	D	N	A			
	13.	P	R	Z	E	K	Ą	T	N	A									
	14.	P	R	O	M	I	L												
	15.	O	D	J	E	M	N	A											
	16.	C	Z	Y	N	N	I	K											
					17.	S	I	E	C	Z	N	A							
18.	F	I	G	U	R	A		G	E	O	M	E	T	R	Y	C	Z	N	A
					19.	R	A	M	I	Ę									
20.	K	W	A	D	R	A	T												

Zadania zamknięte

Zadanie	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź I	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ
Odpowiedź II	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź III	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA

Zadania otwarte

Przykładowe rozwiązania:

Zadanie 10.

Długości części pręta:

$$a$$

$$b = 3 \cdot a$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot b$$

$$a + b + c = 110$$

$$a + 3a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = 110$$

$$a = 20$$

$$b = 3 \cdot 20 = 60$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 30$$

Odp. Długości odcinków pręta wynoszą: 20 cm, 60 cm, 30 cm.

Zadanie 11.

I sposób

Stop I	Stop II	Stop III	
500	960	750	Próba stopu
0,84	x	$0,84 + x$	Masa stopu (kg)
$0,500 \cdot 0,84 = 0,42$	$0,960x$	$0,750 \cdot (0,84 + x)$	Masa czystego złota

$$0,42 + 0,960x = 0,750 \cdot (0,84 + x)$$

$$x = 1$$

Odp. Należy dodać 1 kg stopu próby 960.

II sposób

0,84 kg stopu próby 500 zawiera 0,42 kg czystego złota

m – masa stopu próby 960, który należy dodać

$0,960m$ - zawartość czystego złota w stopie próby 960

$$0,42 + 0,96m = 75\%$$

$$0,84 + m = 100\%$$

$$(0,42 + 0,96m) \cdot 100\% = (0,84 + m) \cdot 75\%$$

$$m = 1$$

Odp. Należy dodać 1 kg stopu próby 960.

Zadanie 12.

<i>I ważenie:</i> na szalkach kładziemy po dwie dowolne kostki.			
<i>Wariant 1.</i> Szalki są w równowadze.		<i>Wariant 2.</i> Jedna z szalek przeważa (ozn. S1)	
<i>II ważenie:</i> na szalkach kładziemy jedną kostkę z poprzednio ważonych oraz kostkę nieważoną w I ważeniu.		<i>II ważenie:</i> na szalkach kładziemy po jednej kostce z pary poprzednio ważonej na szalce S1.	
<i>Wariant 1.</i> Przeważa szalka z kostką nieważoną w I ważeniu.	<i>Wariant 2.</i> Przeważa szalka z kostką ważoną w I ważeniu.	<i>Wariant 1.</i> Szalki pozostają w równowadze.	<i>Wariant 2.</i> Jedna z szalek przeważa.
<i>Wniosek.</i> Kostka fałszywa jest cięższa.	<i>Wniosek.</i> Kostka fałszywa jest lżejsza.	<i>Wniosek.</i> Kostka fałszywa jest lżejsza.	<i>Wniosek.</i> Kostka fałszywa jest cięższa.

Zadanie 13.

$$DE = x$$

$$CD = 6 \text{ cm}$$

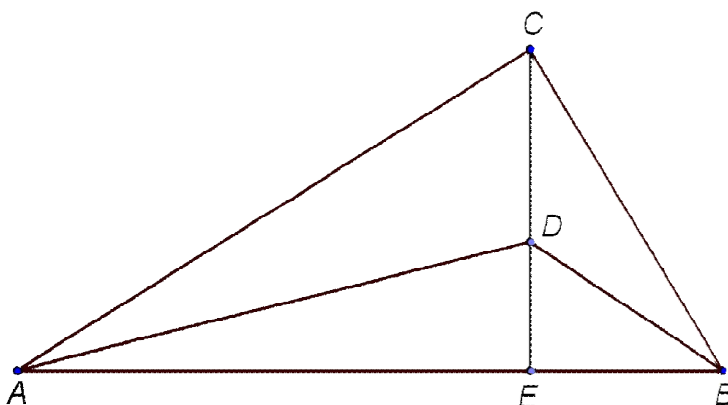
$$AB = 10 \text{ cm}$$

$$P_{ADBC} = P_{ABC} - P_{ABD}$$

$$P_{ADBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (6 + x) - \frac{1}{2} \cdot 10x$$

$$P_{ADBC} = 30 \text{ cm}^2$$

Odp. Pole czworokąta $ADBC$ wynosi 30 cm^2 .



Zadanie 14.

I sposób

$$|AB| = |CD| = 12$$

$$|AC| = 13$$

r – promień okręgu

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \text{ (tw. Pitagorasa)}$$

$$|BC| = 5$$

$$\frac{1}{2}|AB|r + \frac{1}{2}|BC|r + \frac{1}{2}|AC|r = P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB||BC| = 60$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12r + \frac{1}{2} \cdot 5r + \frac{1}{2} \cdot 13r = P_{ABC} = 60$$

$$r = 2$$

$$|PO|^2 + |PQ|^2 = |QO|^2$$

$$(12 - 2r)^2 + (5 - 2r)^2 = |QO|^2$$

$$|QO| = \sqrt{65}$$

Odp. Odległość środków okręgów wynosi $\sqrt{65}$ cm.

II sposób obliczenia r

$$\triangle AKO \equiv \triangle MAO$$

$$\triangle OMC \equiv \triangle OLC$$

Stąd:

$$|AK| = |AM| = 12 - r$$

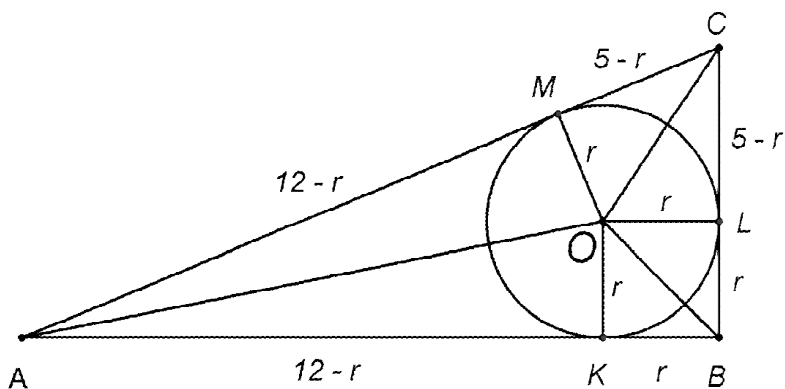
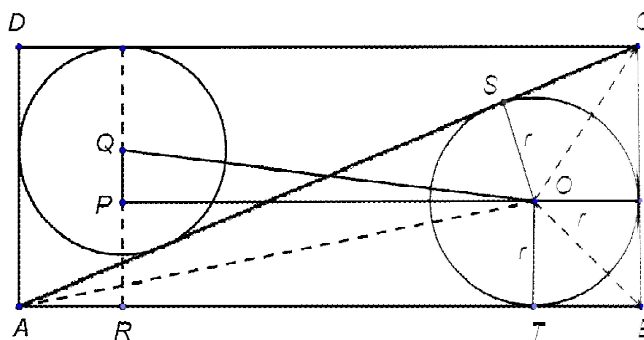
$$|LC| = |MC| = 5 - r$$

$$|AC| = 12 - r + 5 - r$$

$$13 = 12 - r + 5 - r$$

$$r = 2$$

Dalej, jak w sposobie I.



Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Obliczenie długości: a, b, c .	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Ułożenie równania, układu równań, wyrażenia arytmetycznego umożliwiającego obliczenie szukanych wielkości	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
11	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Poprawne obliczenie masy stopu próby 960 $m_{II} = 1 \text{ kg}$ (lub 100 dag lub 1000 g).	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Ułożenie równania opartego na równości mas czystego złota w sumie stopów I i II oraz w stopie III.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Zapisanie wyrażenia pozwalającego obliczyć masę czystego złota w co najmniej jednym stopie.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
12	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Opis I i II ważenia i wskazanie obu wniosków po każdym z ważeń: dla sytuacji równych i nierównych wag.	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Opis I ważenia i wskazanie obu wniosków po każdym z ważeń: dla sytuacji równych i nierównych wag ORAZ opis II ważenia ze wskazaniem tylko jednego z wniosków.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Opis I i II ważenia bez wskazania obu wniosków po I ważeniu ALBO opis I ważenia i wskazanie obu wniosków: dla sytuacji równych i nierównych wag.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.

Zad.	Poziom wykonania	Schemat punktowania	Liczba punktów
13	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Obliczenie pola czworokąta $ADBC$. $P_{ADBC} = 30 \text{ cm}$	3 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Zapisanie wyrażenia (równania) pozwalającego obliczyć pole czworokąta $ADBC$.	2 p.
	Poziom 2: dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane.	Wykonanie rysunku pomocniczego zawierającego informacje zawarte w zadaniu.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.
14	Poziom 6: pełne rozwiązanie.	Obliczenie odległości środków okręgów.	5 p.
	Poziom 5: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.).	Poprawna metoda obliczenia długości boków trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest odcinkiem łączącym środki okręgów.	4 p.
	Poziom 4: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończzone lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne.	Obliczenie długości promienia okręgów stycznych.	3 p.
	Poziom 3: zasadnicze trudności zadania zostały pokonane, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy.	Wykorzystanie twierdzenia o stycznych do okręgu – podanie metody obliczenia długości promienia okręgów stycznych.	2 p.
	Poziom 1: dokonano niewielkiego, ale koniecznego postępu na drodze do całkowitego rozwiązania.	Obliczenie długości drugiego boku prostokąta.	1 p.
	Poziom 0: rozwiązanie niestanowiące postępu; brak rozwiązania.		0 p.