SCHEMAT PUNKTOWANIA

Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
dla uczniów gimnazjów

Rok szkolny 2010/2011

Etap rejonowy

Przy punktowaniu zadań należy stosować następujące ogólne reguły:

- Punktując rozwiązania zadań przyznajemy tylko całkowitą liczbę punktów.
- Punkt za wybór metody rozwiązania zadania przyznajemy, gdy uczeń zauważył wszystkie istotne własności i związki oraz zaczął je poprawnie stosować, np.: wybrał właściwy algorytm, wzór (i podstawił do niego dane liczby), w inny sposób pokazał plan rozwiązania zadania.
- Punkt za wykonanie zadania (np. obliczenie szukanej wielkości) przyznajemy tylko wtedy, gdy uczeń konsekwentnie stosuje przyjętą metodę rozwiązania (a nie zapisuje np. ciągu przypadkowych obliczeń) i doprowadza do otrzymania ostatecznego, prawidłowego wyniku.
- Nie jest wymagana pisemna odpowiedź, ale jednoznaczne wskazanie wyniku lub rozstrzygnięcia problemu.
- Za każdy inny niż podany w kluczu, poprawny sposób rozwiązania zadania, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- W przypadku, gdy zadanie rozwiązywano innym sposobem, niż podany w kluczu, ale popełnione zostały błędy lub nie dokończono rozwiązywania, należy przyznać proporcjonalnie mniej punktów, niż wynosi ich maksymalna liczba dla tego zadania.
- Do następnego etapu zostają zakwalifikowani uczniowie, którzy uzyskali 83% lub więcej punktów możliwych do zdobycia, tzn. 35 punktów lub więcej.

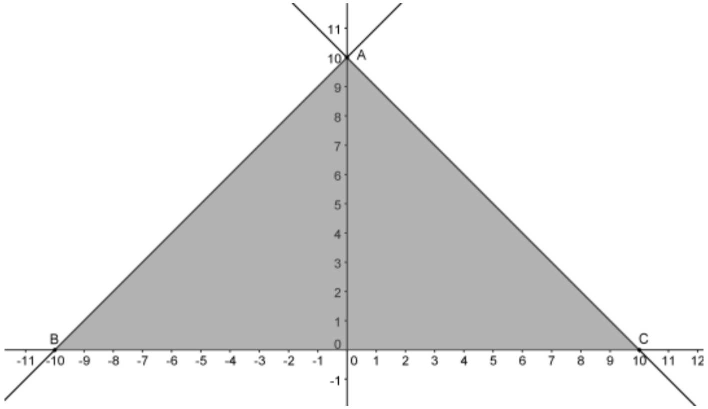
Zadania zamknięte

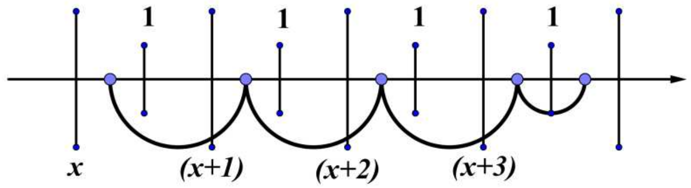
Zadanie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Odpowiedź A	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA
Odpowiedź B	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ
Odpowiedź C	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ	PRAWDA	PRAWDA	PRAWDA	FAŁSZ

Zadania otwarte

Nr zadania	Przykładowe rozwiązania	Schemat punktowania	Liczba punktów
9	Jeżeli p jest liczbą pierwszą i parzystą, to $p = 2$, a wtedy $2 + 12$ jest liczbą złożoną. Jeżeli p jest liczbą pierwszą i nieparzystą, to $p + 25$ jest liczbą parzystą, a każda liczba parzysta różna od 2 jest liczbą złożoną. Zatem $p + 12$ i $p + 25$ nie mogą być jednocześnie pierwsze.	*Za uwzględnienie w uzasadnieniu podziału zbioru liczb pierwszych na parzyste i nieparzyste* ***– 1 pkt****.*	**3 pkt.**
		Za uzasadnienie, że jeżeli p jest liczbą parzystą, to p = 2, *i wtedy 2 + 12 jest liczbą złożoną (lub 2 + 25 jest liczbą złożoną) –* ***1 pkt****.*	
		Za uzasadnienie, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, nieparzystą, to p + 25 zawsze jest liczbą złożoną – ***1 pkt****.*	
10 **(I sposób)**	$x^2 - y^2 = 29$ $(x-y)(x+y)=29$ Skoro x i y są liczbami naturalnymi, to z warunków zadania wynika , że $x > y$ oraz suma i różnica tych liczb są liczbami naturalnymi i $x + y > x - y$. 29 jest liczbą pierwszą, więc jej rozkład na czynniki jest tylko jeden: $29 \cdot 1$ $\begin{cases} x + y = 29 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 15 \\ y = 14 \end{cases}$ Odp. Jest jedna taka para liczb 14 i 15.	*Za zapisanie warunku:* *$x^2 - y^2 = 29$* *i rozłożenie na iloczyn:* *$(x + y)(x - y) = 29$ –* ***1 pkt****.*	**3 pkt.**
		Za wykorzystanie rozkładu liczby 29 na iloczyn 1 i 29 oraz rozwiązanie układu równań – ***2 pkt****.* ***Uwaga****:* *Jeżeli rozumowanie jest dobre, a występuje błąd rachunkowy –* ***1 pkt****.* *Jeżeli jest dobre rozwiązanie bez uzasadnienia –* ***1 pkt****.*	

Nr zadania	Przykładowe rozwiązania	Schemat punktowania	Liczba punktów
10 **(II sposób)**	$(n+1)^2 - n^2$: … $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$ $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ $14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$ $\mathbf{15^2 - 14^2 = 225 - 169 = 29}$ $16^2 - 15^2 = 256 - 225 = 31$ …	*Za rozpatrzenie przypadków par liczb (n+1) i n i wskazanie właściwej pary liczb –* ***1 pkt.***	**3 pkt.**
	$(n+2)^2 - n^2$: … $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$ $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$ $9^2 - 7^2 = 81 - 49 = 32$ … $(n+3)^2 - n^2$: … $6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$ $7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$ $8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$ …	*Za rozpatrzenie co najmniej trzech rodzajów par liczb* ***– 2 pkt.*** ***albo*** *za rozpatrzenie wszystkich możliwych przypadków par liczb bez wskazania właściwej pary –* ***2 pkt.***	
	$(n+4)^2 - n^2$: … $5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$ $6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$ $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$ … $(n+5)^2 - n^2$: … $6^2 - 1^2 = 36 - 1 = 35$ $7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$ …	*Za rozpatrzenie wszystkich możliwych przypadków par liczb i wskazanie właściwej pary liczb –* ***3 pkt.***	

Nr zadania	Przykładowe rozwiązania	Schemat punktowania	Liczba punktów
11	 Z własności funkcji wynika, że punkt *A* ma współrzędne (0, 10). Zatem wysokość trójkąta *ABC* opuszczona z wierzchołka *A* wynosi 10. Współrzędne punktów *B* i *C* wynoszą (–*x*, 0) oraz (*x*, 0). Punkt *C* leży na osi *OX*, zatem spełnione jest równanie: $0 = -ax + 10$. Stąd wynika, że wartość współrzędnej x jest połową długości podstawy *BC* trójkąta i wynosi: $x = \frac{10}{a}$. Korzystając w warunku o polu trójkąta *ABC* otrzymujemy: $100 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{10}{a}\right) \cdot 10$, zatem $a = 1$.	*Za wykorzystanie współczynnika b = 10 do podania wysokości trójkąta – **1 pkt.*** *Za poprawny sposób wyznaczenia miejsc zerowych i wykorzystanie ich do podania długości podstawy – **1 pkt.*** *Za poprawny sposób obliczenia wartości współczynnika a (wykorzystanie informacji o polu trójkąta) – **1 pkt*** ***albo*** *za podanie wartości współczynnika a, jako wniosku z zapisanego równania bez uzasadnienia **– 1 pkt.*** *Za poprawność rachunkową w całym zadaniu – **1 pkt.***	**4 pkt.**

<table>
<tr><th>Nr zadania</th><th>Przykładowe rozwiązania</th><th>Schemat punktowania</th><th>Liczba punktów</th></tr>
<tr><td rowspan="3">12</td><td rowspan="3">(I sposób)


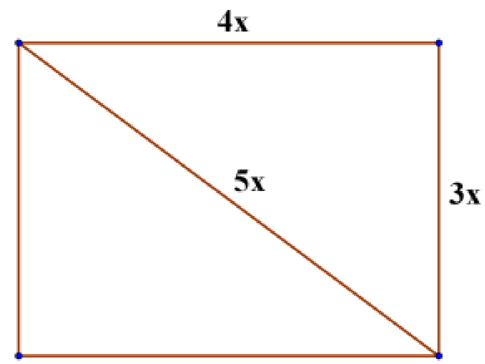
x – liczba uderzeń zegara o pełnej godzinie przed wyjściem Janka
Dla $9 < x \le 12$ suma uderzeń zegara w czasie nieobecności Janka byłaby mniejsza niż 37.
Dla $x \le 9$ mamy równanie:
$(x+1)+(x+2)+(x+3)+4=37$
Stąd
$x=9$
Ponieważ 9 uderzeń zegara oznacza godzinę 9 lub 21, więc są dwa rozwiązania.
Odp.: Janek wyszedł o 9:15, a wrócił do domu o 12:45 lub wyszedł o 21:15, a wrócił o 0:45.

(II sposób)
37 uderzeń to suma 33 uderzeń o trzech kolejnych, pełnych godzinach i 4 uderzeń 30 minut po pełnych godzinach.
Iloraz 33 : 3 = 11 oznacza liczbę uderzeń zegara w środkowej godzinie spośród trzech pełnych godzin, które rozważamy. Są to zatem godziny: 10., 11., 12 albo 22., 23., 24.
Zegar w czasie nieobecności Janka bił, gdy wskazywał : 9:30, 10:00, 10:30, 11:00, 11:30, 12:00, 12:30
albo 21:30, 22:00, 22:30, 23:00, 23:30, 24:00, 0:30
Odp.: Janek wyszedł o 9:15, a wrócił do domu o 12:45 lub wyszedł o 21:15, a wrócił o 0:45.</td><td>Za analizę zadania (opis słowny, równanie, schemat) – 1 pkt.</td><td rowspan="3">4 pkt.</td></tr>
<tr><td>Za wyznaczenie pełnych godzin wybijanych przez zegar i sprawdzenie warunku dotyczącego sumy uderzeń zegara (np. rozwiązanie równania) – 1 pkt.</td></tr>
<tr><td>Za podanie czasu wyjścia i powrotu Janka – 2 pkt.

(Jeżeli uwzględnione zostanie tylko jedno rozwiązanie – 1p.)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Nr zadania</th><th>Przykładowe rozwiązania</th><th>Schemat punktowania</th><th>Liczba punktów</th></tr>
<tr><td rowspan="3">13</td><td rowspan="3">III sposób)
Metoda prób (przykład zapisu):
...
Godz. wyjścia 7:15, godz. powrotu 10:45
1 + 8 + 1 + 9 + 1 + 10 + 1 = 31
Godz. wyjścia 8:15, godz. powrotu 11:45
1 + 9 + 1 + 10 + 1 + 11 + 1 = 34
Godz. wyjścia 9:15, godz. powrotu 12:45
1 + 10 + 1 + 11 + 1 + 12 + 1 = 37
Godz. wyjścia 10:15, godz. powrotu 13:45
1 + 11 + 1 + 12 + 1 + 1 + 1 = 28
Godz. wyjścia 11:15, godz. powrotu 14:45
1 + 12 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 19
...
Wytłuszczona sekwencja uderzeń jest taka sama także dla
godz. wyjścia 21:15, godz. powrotu 0:45.
Odp.: Janek wyszedł o 9:15, a wrócił do domu o 12:45 lub wyszedł o 21:15, a wrócił o 0:45.</td><td>Za analizę zadania (opis słowny, równanie, schemat) – 1 pkt.</td><td rowspan="3">4 pkt.</td></tr>
<tr><td>Za wyznaczenie pełnych godzin wybijanych przez zegar i sprawdzenie warunku dotyczącego sumy uderzeń zegara (np. rozwiązanie równania) – 1 pkt.</td></tr>
<tr><td>Za podanie czasu wyjścia i powrotu Janka – 2 pkt.

(Jeżeli uwzględnione zostanie tylko jedno rozwiązanie – 1p.)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Nr zadania</th><th>Przykładowe rozwiązania</th><th>Schemat punktowania</th><th>Liczba punktów</th></tr>
<tr><td rowspan="3">13</td><td rowspan="3">
Jeżeli boki prostokąta oznaczymy przez 3x i 4x, to przekątna ma długość 5x, bo odcinki te tworzą trójkąt pitagorejski.
Obwód trójkąta wynosi:
$3x + 4x + 5x = 36$, stąd $x = 3$.
Boki prostokąta wynoszą odpowiednio: 9 cm i 12 cm.</td><td>Za poprawne wyznaczenie i uzasadnienie (obliczenie) długości przekątnej 5x – 2 pkt.
(Wyznaczenie długości bez uzasadnienia – 1pkt.)</td><td rowspan="3">4 pkt.</td></tr>
<tr><td>Za poprawne wyliczenie długości odcinka jednostkowego x (wykorzystanie długości obwodu trójkąta) – 1 pkt.</td></tr>
<tr><td>Za poprawne obliczenie długości boków trójkąta – 1 pkt.</td></tr>
</table>